Eckhard Platen, University of Technology Sydney

Anwendung des Benchmark Ansatzes für die Altersversorgung

Jahrestagung, 26. April 2024

Krise der Altersversorgung!

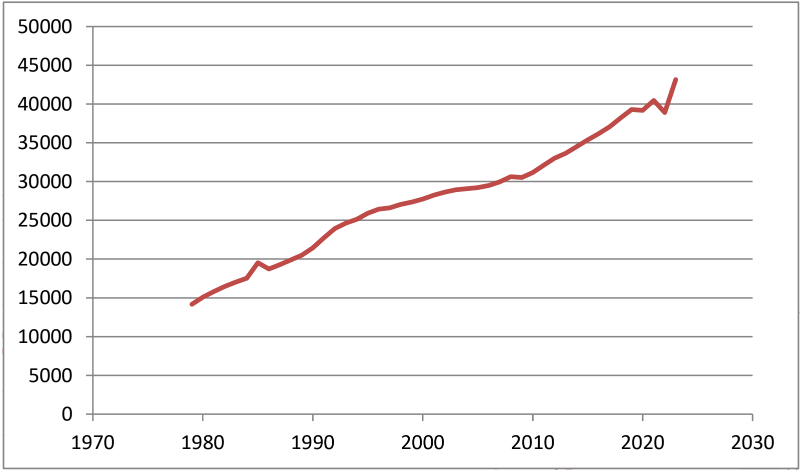
Rentenniveau?

Umverteilung zementieren?

Generationenkapital? ...

Antworten sollten theoretisch fundiert sein!

Energieerhaltungssatz



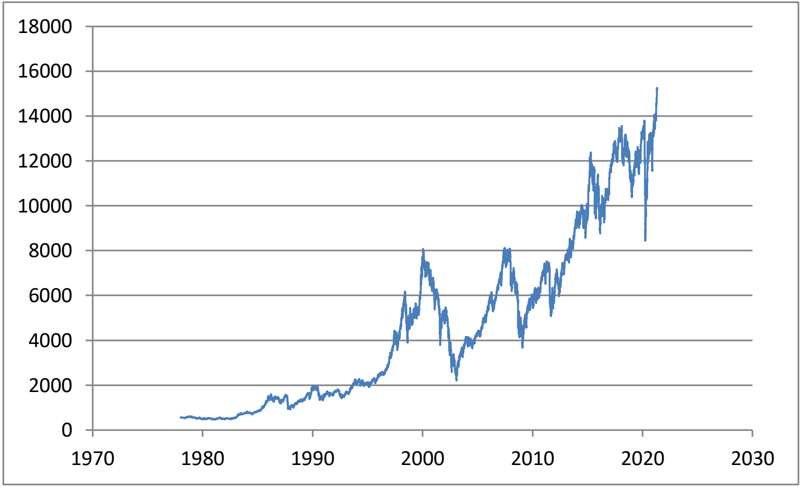
Jährliches Durchschnittsentgelt

Kernfrage der Altersversorgung für einen Versicherer:

Kann man aus den Rentenbeiträgen

höhere risikolose Rentenauszahlungen generieren

als derzeit praktiziert?


18000
16000
14000
12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
1970
1980
1990
2000
2010
2020
2030

S_t DAX

Preiswerte Approximation einer Nullkuponanleihe:

Wie teuer wäre zur Zeit t

eine preiswerte Approximation $P(t, 2023)$

der Auszahlung einer Nullkuponanleihe gewesen,

die einen Euro im Jahre 2023 auszahlt?

(Vereinfachung: Nur in DAX S_t und Euro dynamisch ohne Zinsen investieren.)

Preiswert Approximierte Nullkuponanleihe $P(t, T)$

Zahlt **einen Euro** zur Zeit T:

1. Pl. (2002):

$$P(t,T) = 1 - \exp\left\{-\frac{S_t}{2(e^{\tau_T} - e^{\tau_t})}\right\}$$

τ_t **Aktivitätszeit**, S_t Benchmark .

2. Fergusson & Pl. (2022), Barone Adesi, Pl. & Sala (2024):

$$P(t,T) \approx 1 - \exp\left\{-\frac{S_t}{2(e^{\bar{\tau}_T} - e^{\bar{\tau}_t})}\right\}$$

$\bar{\tau}_t$ **Trendlinie**.

3. Pl. (2024):

$$P(t,T) \approx 1 - \exp\left\{-\frac{S_t}{2(e^{\bar{\tau}_T} - e^{\tau_t})}\right\}.$$

Aktivitätszeit τ_t

$$\tau_t = \ln([\sqrt{S_\cdot}]_{t_0,t} + e^{\tau_{t_0}})$$

Quadratischer Variationsprozess:

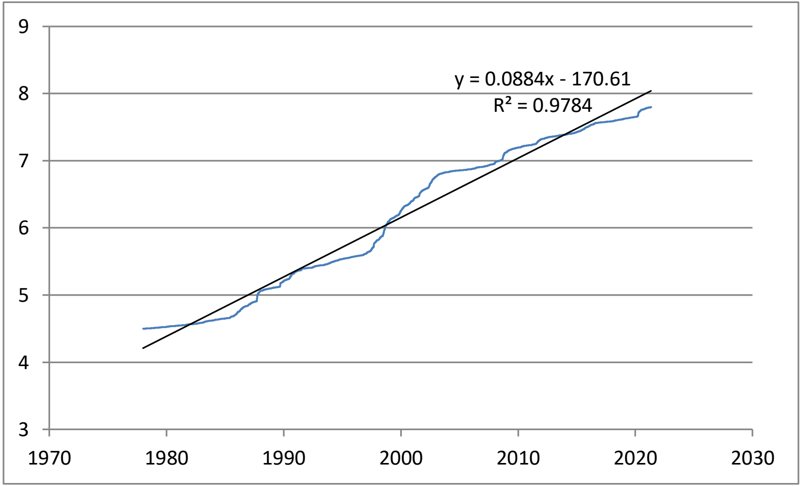
$$[\sqrt{S_\cdot}]_{t_0,t_n} \approx \sum_{i=1}^{n} (\sqrt{S_{t_i}} - \sqrt{S_{t_{i-1}}})^2$$

Im Mittel **lineare Aktivitätszeit**:

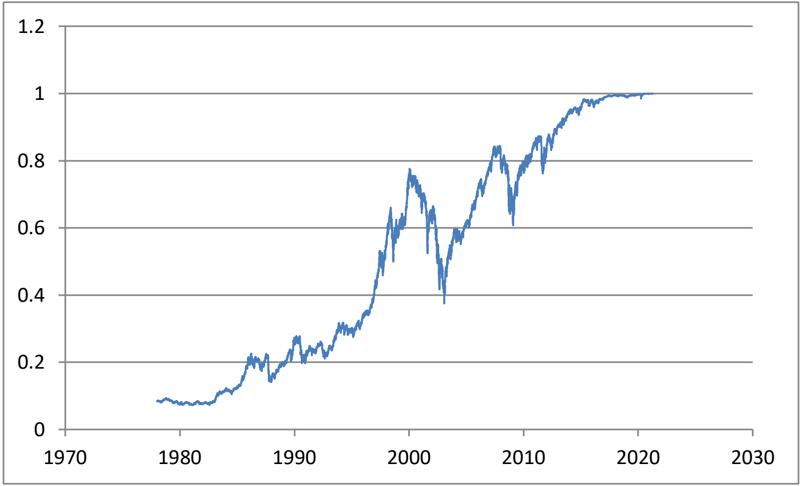
R^2 der Trendlinie maximieren $\rightarrow$

Trendline: $\bar{\tau}_{t_i} = \bar{\tau}_{t_0} + \bar{a} t_i$.

Aktivitätszeit und Trendlinie sind beobachtbar!



Aktivitätszeit $\tau_t = \ln([\sqrt{S_\cdot}]_{t_0,t} + e^{\tau_{t_0}})$ **und Trendlinie** $\bar{\tau}_t$



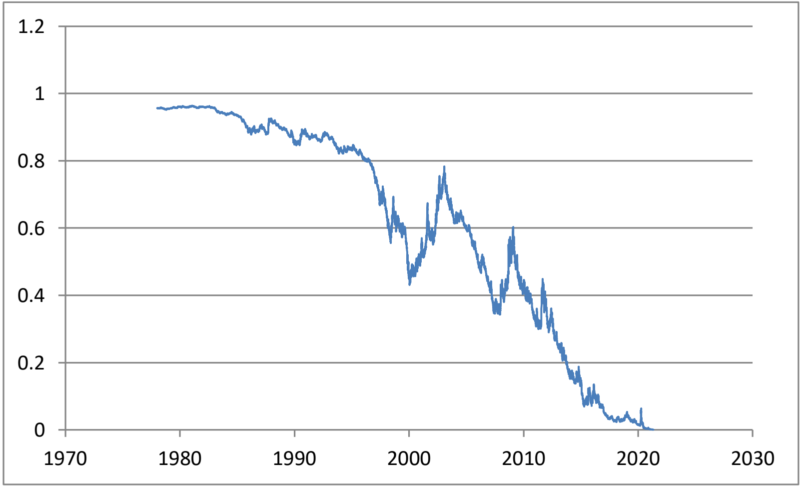
Nullkuponanleihe $P(t, T)$

Sicherungsgeschäft (Hedge Portfolio) $V(t)$

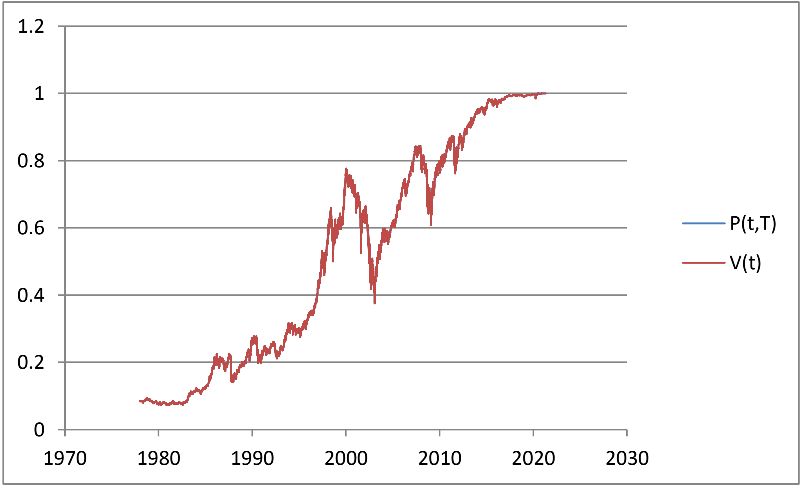
$$V(t_i) = V(t_{i-1})\left(1 + \pi_{t_{i-1}}\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} - 1\right)\right)$$

Anteil dynamisch investiert im DAX S_t:

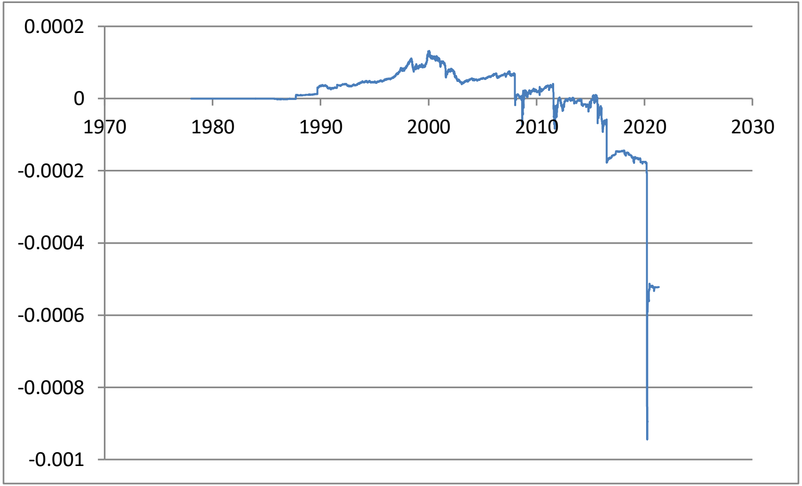
$$\pi_t = (1 - P(t,T)^{-1})\ln(1 - P(t,T))$$



Anteil π_t investiert in Benchmark S_t



Hedge Portfolio $V(t)$ und Nullkuponanleihe $P(t, T)$



Hedgefehler $V(t) - P(t,T)$

Beispiel mit akkumuliertem Kapital

Eine Person legte jedes Jahr, von 1978 beginnend,
18% des Durchschnittssentgelts
in preiswert approximierte Nullkuponanleihen an,
die im Jahre 2023 zum Pensionsbeginn fällig wurden.

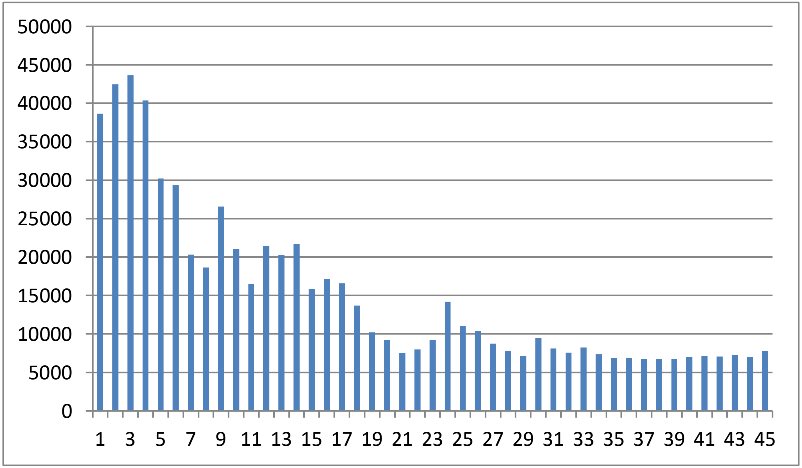
Insgesamt wurden **224958 Euro** über die 45 Jahre angelegt.

Frage an Alle:

Ungefähr **wieviel Euro** hatte die Person **2023** akkumuliert?

1.: 300000 Euro = 113,33%
2.: 450000 Euro = 200%
3.: 675000 Euro = 300%

(Die etwa 225000 Euro wurden nur in den DAX und Euros (ohne Zinsen) dynamisch investiert.)



Akkumulierte Anleihen pro Ursprungsjahr

Akkumuliertes Kapital:

675615Euro.

Dreifache des eingesetzten Kapitals.

Auf 12 Jahre aufgeteilt resultiert eine jährliche Rente von **56301Euro** (4691 Euro monatlich).

$\approx$ **130%** des Durchschnittsentgelts.

Falls 22% angelegt, $\rightarrow$ 160% des Durchschnittssentgelts .

Mit Zinsen, breiter und besser diversifiziertem Aktienportfolio,
und als preiswert approximierte Annuität
$\rightarrow$ noch deutlich höher.

Benchmark Ansatz:

Pl.& Heath (2006).

Unter minimalen Annahmen
voll auf **mathematischen Herleitungen** basierend!

Benchmark S_t - gut diversifiziertes Aktienportfolio,

z.B.: DAX, MSCI, EWI114 (Pl.& Rendek (2012,2020))

Das gesamte Risikomanagement wird bezüglich der **Benchmark** konstruiert und erzielt **höheres Wachstum** als das klassische Risikomanagement.

1. Annahme:

Wachstumsoptimales Portfolio S_t^{**} existiert!

$\rightarrow$ Reale Preisformel:

$$H_t = \mathbf{E}_t \left(\frac{S_t^{**}}{S_T^{**}} H_T \right)$$

minimaler Preis

$\frac{H_t}{S_t^{**}}$ Martingal

$\mathbf{E}_t(.)$ bedingter Erwartungswert unter realem Wahrscheinlichkeitsmass

Allgemein:

Für positives Portfolio V_t:

$$\frac{V_t}{S_t^{**}} \geq \mathbf{E}_t\left(\frac{V_T}{S_T^{**}}\right)$$

$\rightarrow$ **Supermartingal** $\rightarrow$

$$V_t \geq \mathbf{E}_t\left(\frac{S_t^{**}}{S_T^{**}} V_T\right)$$

S_t^{**} gehebeltes Portfolio, investiert in Benchmark S_t

und hebelt Sparkonto S_t^0.

2. Annahme:

Benchmark S_t in Aktivitätszeit τ_t
Grenzwert eines Geburts- und Todesprozesses!

Unabhängig gebären Werte neue Werte oder sterben.

Natürliche Dynamik diversifizierter Aktienportfolios!

Pl. (2024)

Minimalmarktmodel in Aktivitätszeit

$\rightarrow S_t$ quadrierter Besselprozess

$$dS_t = \ldots + \sqrt{4e^{\tau_t}}\sqrt{S_t}dW_{\tau_t}$$

Itô Formel $\rightarrow$

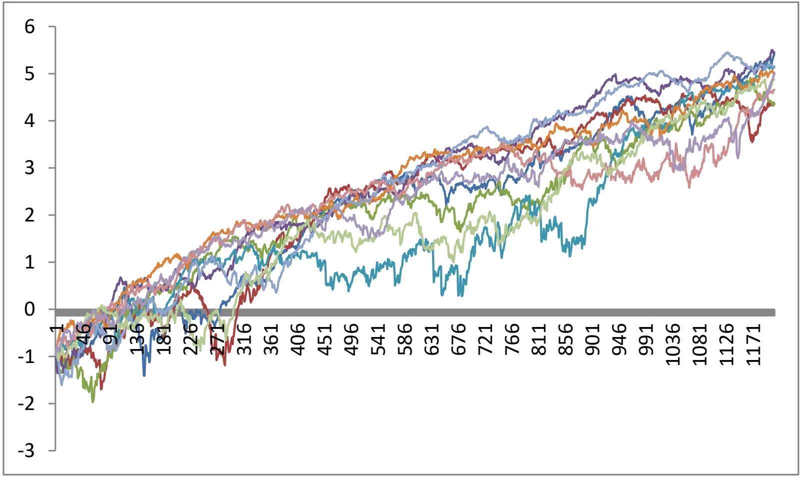
$$d\sqrt{S_t^*} = \ldots + e^{\frac{\tau_t}{2}} dW_{\tau_t}$$

quadratischer Variationsprozess:

$$\left[\sqrt{S_\cdot^*}\right]_{t_0,t} = \int_{t_0}^{t} e^{\tau} d\tau = e^{\tau_t} - e^{\tau_{t_0}}$$

$\rightarrow$ **Aktivitätszeit**

$$\tau_t = \ln\left(\left[\sqrt{S_\cdot}\right]_{t_0,t} + e^{\tau_{t_0}}\right)$$



Simulierter Logarithmus der Benchmark

$\frac{S_t}{S_t^{**}}$ ist ein Martingal $\rightarrow$ Numérairewechsel $\rightarrow$

Benchmark-neutrale Preisformel:

$$H_t = \mathbf{E}_t^{Q_S}\left(\frac{S_t}{S_T} H_T\right)$$

$\mathbf{E}_t^{Q_S}(.)$ bedingter Erwartungswert unter
benchmark-neutralem Wahrscheinlichkeitsmass Q_S

Pl. (2024)

Benchmark-Neutrale Nullkuponanleihe

$$P(t,T) = \mathbf{E}_t^{Q_S}\left(\frac{S_t}{S_T}\right) = 1 - \exp\left\{-\frac{S_t}{2(e^{\tau_T} - e^{\tau_t})}\right\}$$

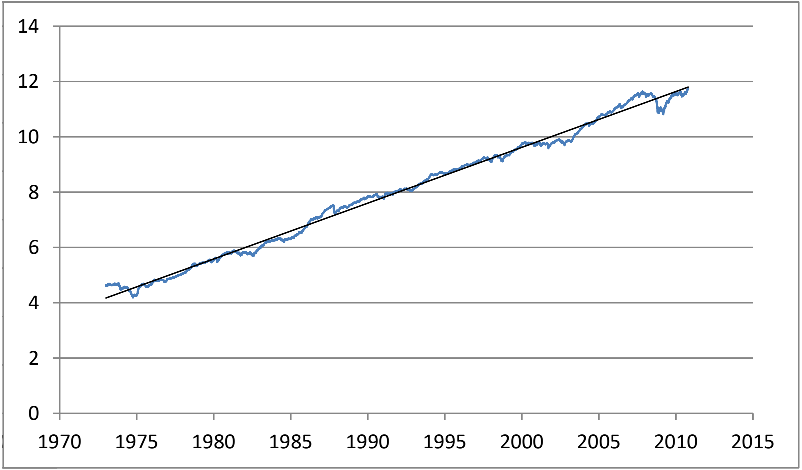
minimaler Preis

Riskoneutrale Bewertung:

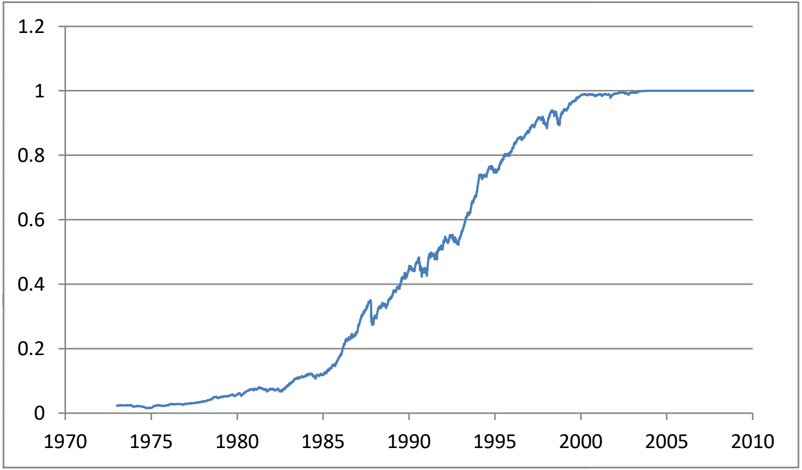
$\frac{S_t^0}{S_t^{**}}$ **ist kein Martingal** $\rightarrow$

Risikoneutrales Bewertungsmass ist kein Wahrscheinlichkeitsmass!

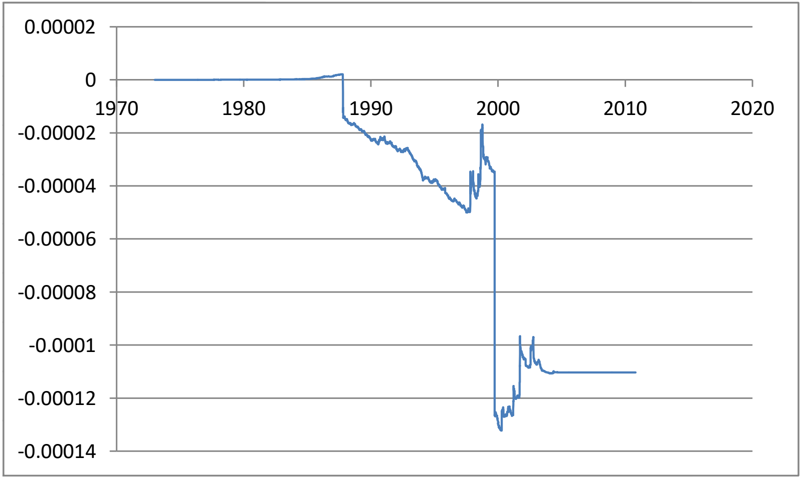
$\rightarrow$ **Risikoneutrale Preise sind teurer als notwending!**



Logarithmus des diskontierten EWI114, 20% Wachstumsrate, Pl. & Rendek (2012, 2020)



Preiswert Approximierte Nullkuponanleihe , EWI114 als Benchmark $\rightarrow P(t_0, T) \approx 0.023$



Hedgefehler mit EWI114

Zusammenfassung

**1. Man kann aus den Beiträgen
höhere risikolose Rentenauszahlungen generieren
als derzeit praktiziert!**

**2. Das Sicherungsgeschäft ist mathematisch fundiert und
sehr genau!**

Bibliographie

Barone Adesi, G. Platen, E. & C. Sala (2024). Managing the shortfall risk of target date funds by overfunding. *Journal of Pension Economics and Finance*, 1–25.

Fergusson, K.& E. Platen (2022). Less-expensive valuation of long-term annuities linked to mortality, cash and equity. *Annals of Actuarial Science*, 1–38.

Platen, E. (2002). Arbitrage in continuous complete markets. *Advances in Applied Probability*, 34(3), 540–558.

Platen, E. (2024). Benchmark-neutral pricing. http://ssrn.com/abstract=4786090, ArXiv 5527054.

Platen, E., & Heath, D. (2006). A Benchmark Approach to Quantitative Finance. Springer

Platen, E. & R. Rendek (2012). Approximating the numéraire portfolio by naive diversification. *Journal of Asset Management*, 13(1), 34–50.

Platen, E. & R. Rendek (2020). Approximating the growth optimal portfolio and stock price bubbles. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 23(7), 2050048.

Excel Spreadsheet zum Vortrag: doi.org/10.7910/DVN/1L69LE

DAV / DGVFM
Jahrestagung
2024

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

Eckhard Platen, University of Technology Sydney
eckhard.platen@uts.edu.au