

DAV/DGVFM
Jahrestagung
2026

Tobias Hessenauer, Josef Schürle

Ein Ansatz zur Erstellung von Replikationsportfolien im Bausparen

DAV-Jahrestagung | 29.04.2026


Publikation im EAJ

European Actuarial Journal (2025) 15:753–771
<https://doi.org/10.1007/s13385-025-00432-9>

ORIGINAL RESEARCH PAPER



A replication approach for the evaluation of embedded options in German building savings contracts

Tobias Hessenauer¹ · Josef Schürle² 

Received: 28 January 2025 / Revised: 24 July 2025 / Accepted: 3 August 2025 /
Published online: 30 August 2025

© The Author(s), under exclusive licence to European Actuarial Journal Association 2025

Für was können Replikationsansätze verwendet werden?

- Ziel ist die explizite Bewertung impliziter Kundenoptionen, die zinsabhängig ausgeübt werden
- Replikationsansätze finden sich in der Praxis insbesondere in der (Lebens-) Versicherungsbranche (z.B. im Kontext Solvency II) als auch im Finance Bereich (z.B. in der Portfoliobewertung).
- Prinzipiell sind Replikationsportfolien in Bausparkassen für folgende Einsatzzwecke denkbar:
 - **Bewertung der Produkte**
 - **Risikomessung**
 - **Produktentwicklung**
 - **Überführung in ein investierbares Portfolio**

Was ist ein Replikationsportfolio?

- Bei diesem Ansatz wird ein Replikationsportfolio an Finanzinstrumenten mit bekannten Marktwerten zusammengestellt, sodass dieses das ursprüngliche Finanz-Produkt nachbildet.
- Anders gesagt: Darstellung komplexer Zusammenhänge durch Zerlegung in seine „einfacheren“ Einzelteile. Einfacher bezieht sich hier auf die Bewertbarkeit zu Marktpreisen.



Beispiel:

Darstellung eines 10%-igen Coupon-Bonds mit Laufzeit von 5 Jahren mit Hilfe von Zero-Coupon-Bonds (ZCB). Für die exakte Replikation benötigt man je 0,1-mal den 1-, 2-, 3- und 4-jährigen ZCB, sowie 1,1-mal den 5-jährigen ZCB.

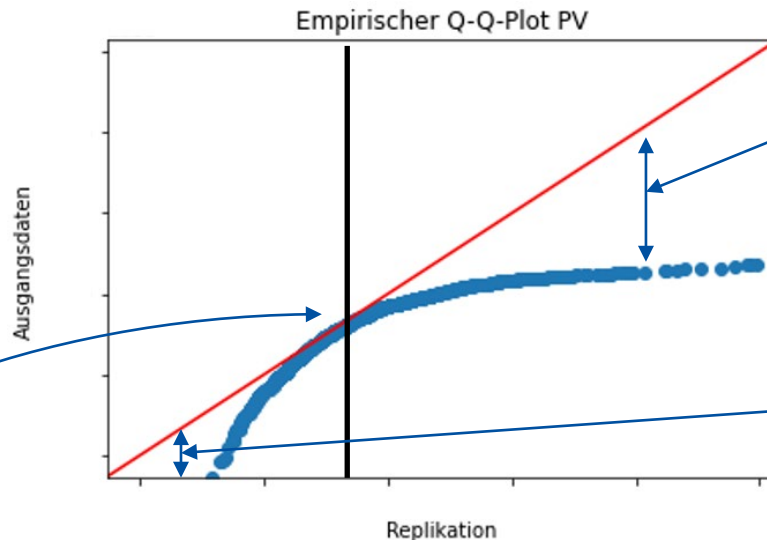


Das Grundproblem: Lineare Instrumente vs. Konvexität

Interpretation:

- **Rote Linie** entspricht Kollektiv-Barwert für diverse künftige Zinsszenarien (Referenzlinie)
- **Blaue Linie** ist Positionierung mit festverzinslichen Kapitalanlagen
- **Blaue Linie** unterhalb der **roten Linie** bedeutet in der Zukunft eine negative Abweichung zur aktuellen Positionierung

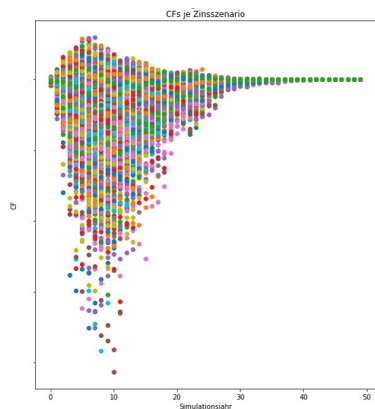
Aktuelle Positionierung aufgrund erwartetem künftigen Zinsszenario



Je weiter die tatsächliche Zinsentwicklung von der Positionierung abweicht, desto größer die negative Abweichung („Konvexität“)

Die Lösung: Replikation der Optionen mit Swaptions

Kollektiv-Cash Flows

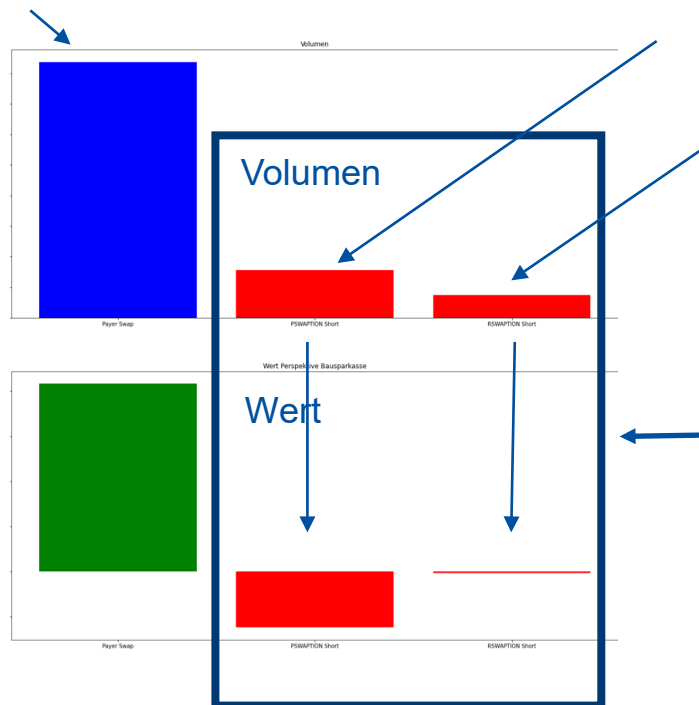


Durch die Replikation werden die finanziellen Wirkungen der impliziten Kundenoptionen explizit sichtbar gemacht. Sie können dadurch analysiert, ggf. optimiert und / oder abgesichert werden.

Swaps

Replikationsportfolio

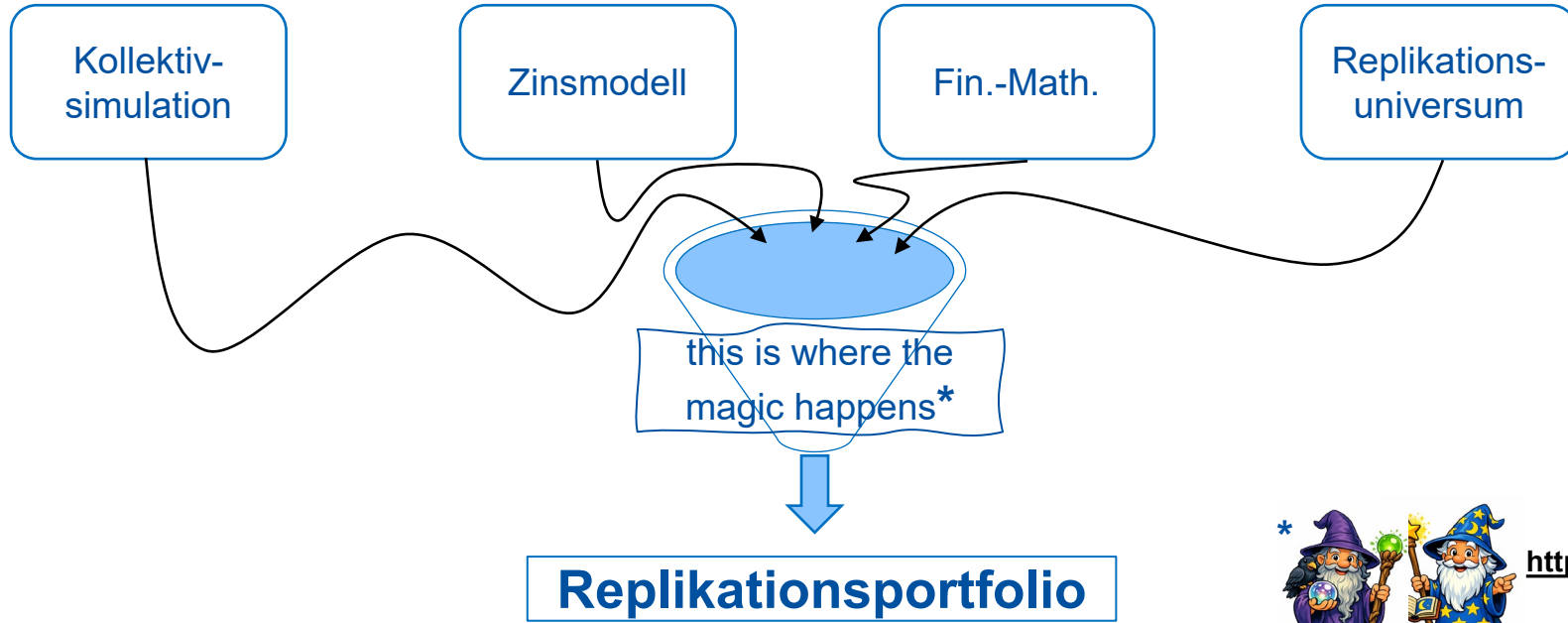
Payer-Swaptions



Receiver-Swaptions

Explizite Darstellung der impliziten Kundenoptionen

Benötigte Bausteine



<https://rdcu.be/eC73m>

Gesamtarchitektur



Hull-White 2 Faktor Modell
kalibriert an atm-Swaptions.
5000 Zinspfade
3000 Kalibrierung
2000 Out of Sample Validierung

Bauspartechnisches Simulationsmodell zur Cashflow-Projektion (auf Monatsbasis) und Barwert-Rechnung für jeden der verwendeten Zinspfade unterteilt nach Spar- und Darlehensphase sowie Tarifvariante.

Jupyter Notebook Sammlung für Aufbereitung und Verdichtung der CFs (Jahresbasis), Ausrollen von CFs für Finanzinstrumente, Bewertung („Verbarwertung“) der aggregierten KollektivCFs und CFs der Finanzinstrumente

Welcher theoretische Ansatz steckt dahinter?

- Die Replikationstechnik bedient sich der **Arbitragetheorie**, wonach – bis auf kurzfristige Störungen – keine risikolosen Gewinne über den risikolosen Zins hinaus bei auf Kapitalmärkten gehandelten Wertpapieren möglich sind.
- **Mark to Model Ansatz**: Bausparkollektive werden nicht auf Märkten gehandelt, insoweit ist der Ansatz an diesem Punkt fiktiv. Für die potenziellen Gegenpositionen – z.B. Swaps und Swaptions – gilt das aber sehr wohl.
- **Ausgangspunkt ist die bauspartechnische Simulation**. Die Modellierung der Kollektivsimulation wirkt sich also unmittelbar auf die Ergebnisse der Replikation aus.
- Technisch wird die Replikation so aufgesetzt, dass für viele gegebene Zinsszenarien eine **Minimierung des MSE** (mean squared error) **zwischen** den Ergebnissen der **Kollektivsimulation** und des **Replikationsportfolios** berechnet wird.
- Damit handelt es sich rein technisch beim Optimierungsansatz um eine **multiple lineare Regression**.

Das mathematisch zu lösende Problem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} CF_{SyntSwap}^{Szen(1)}(1) \\ CF_{SyntSwap}^{Szen(1)}(2) \\ \dots \\ CF_{SyntSwap}^{Szen(1)}(n) \\ CF_{SyntSwap}^{Szen(2)}(1) \\ \dots \\ CF_{SyntSwap}^{Szen(2)}(n) \\ \dots \\ CF_{SyntSwap}^{Szen(m)}(n) \end{pmatrix}}_{\kappa: \text{ Simulationsergebnisse}} = \underbrace{\begin{pmatrix} CF_{FI(1)}^{Szen(1)}(1) & CF_{FI(2)}^{Szen(1)}(1) & \dots & CF_{FI(k)}^{Szen(1)}(1) \\ CF_{FI(1)}^{Szen(1)}(2) & CF_{FI(2)}^{Szen(1)}(2) & \dots & CF_{FI(k)}^{Szen(1)}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CF_{FI(1)}^{Szen(1)}(n) & CF_{FI(2)}^{Szen(1)}(n) & \dots & CF_{FI(k)}^{Szen(1)}(n) \\ CF_{FI(1)}^{Szen(2)}(1) & CF_{FI(2)}^{Szen(2)}(1) & \dots & CF_{FI(k)}^{Szen(2)}(1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CF_{FI(1)}^{Szen(2)}(n) & CF_{FI(2)}^{Szen(2)}(n) & \dots & CF_{FI(k)}^{Szen(2)}(n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ CF_{FI(1)}^{Szen(m)}(n) & CF_{FI(2)}^{Szen(m)}(n) & \dots & CF_{FI(k)}^{Szen(m)}(n) \end{pmatrix}}_{A: \text{ Replikationsuniversum}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \omega_k \end{pmatrix}}_{\omega: \text{ Replikationsgewichte}}$$

Kompakte Darstellung:

$$\kappa = A \cdot \omega$$

Für ω muss daher gelten:

$$\omega = (A^T A)^{-1} A^T \kappa$$

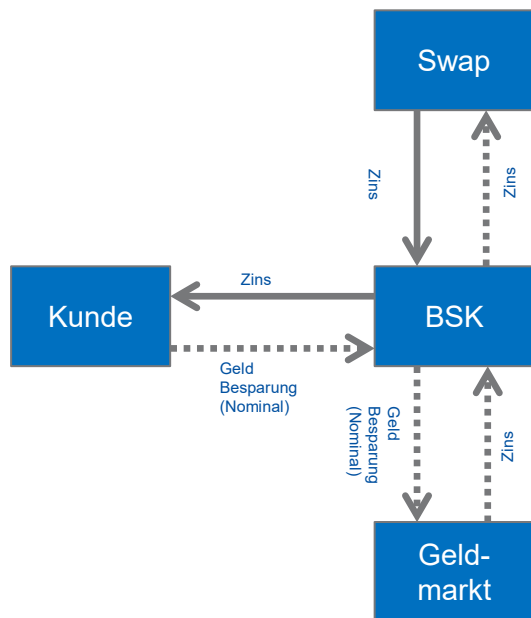
Dies stellt Anforderungen an die sogenannte Designmatrix A

Bezeichnungen: Szenarionummer, Finanzinstrument-Nummer, Zeitpunkt

3 grundsätzliche Herangehensweisen

- **Barwertreplikation**
 - Zu starke Verdichtung, damit Zielgröße zu ungenau
 - Aber: Einsatz als Nebenbedingung führt zu wesentlicher Ergebnisverbesserung
- **Cashflow-Replikation**
 - Durch Monats-Buckets hohe Granularität und dadurch extreme Hardwarevoraussetzungen & Rechenzeiten. Dies kann über Verdichtung auf Jahres-CFs gelöst werden.
 - Es müssen jedoch sehr komplexe Finanzinstrumente zur Replikation eingesetzt werden
 - Modellierungsthemen (z.B. Ablauffiktion) sind nicht bzw. nur sehr komplex modellierbar
- **Replikation Cashflows „synthetischer Swaps“**
 - Financial Engineering Ansatz
 - „Herausrechnen“ des Nominals
 - Überführung der Simulationsergebnisse in Logik der Finanzinstrumente (fixes & variables leg)

Der „synthetische Swap“ Ansatz



1. Kunde bespart Bausparvertrag variabel
2. BSK kann diese variablen Sparzahlungen am Geldmarkt anlegen
3. BSK erhält eine variable Verzinsung
4. BSK zahlt fixen Zins
5. Bewertung Sparphase: Über einen Swap kann die variable Verzinsung in eine fixe umgewandelt werden und somit die fixen Zahlungen an den Kunden dargestellt werden.

Besonderheit: Saldo = ansteigendes Nominal

Es bezeichne

- i_t : Zins für das Intervall $(t-1;t)$
- N_t : Nominal zum Zeitpunkt t
- GHZ_t : Guthabenzinsen für Zeit $(t-1;t)$

Dann gilt: $PV_{SynthSwap} = PV_{var} + PV_{fix}$ mit

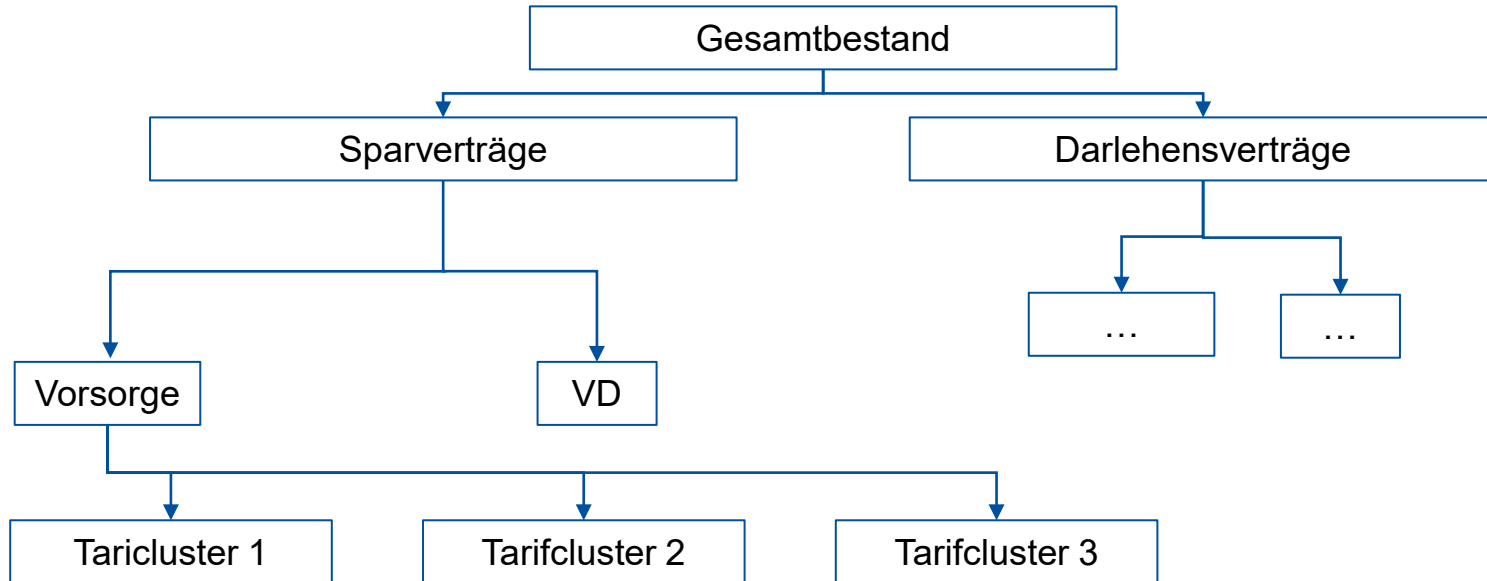
$$PV_{var} = \sum_{l=0}^{n-1} N_l * \frac{i_{l+1}}{\prod_{k=1}^{l+1} (1 + i_k)}$$

$$PV_{fix} = \sum_{l=1}^n GHZ_l * \frac{1}{\prod_{k=1}^l (1 + i_k)}$$

Es kann gezeigt werden, dass für den Kollektivbarwert $PV_{Kollektiv}$ gilt:

$$PV_{Kollektiv} = PV_{SynthSwap} + N_0$$

Replikation von Teilbeständen



Aufbau des Replikationsuniversums

- Verwende ausschließlich Swaps und Swaptions (wg. „Herausrechnen“ des Nominals ist dies möglich!)
- Die Swaps dienen der Abbildung der nicht-optionalen Anteile, die Swaptions werden zur Modellierung der Kundenoptionen verwendet. Ziel: Allokieren Sie möglichst viel Gewicht auf den linearen Teil (Swaps)
- Der Festzins der Swaps wird so ermittelt, dass die Barwertkurve des Replikationsportfolios die Barwertkurve der Basispartechnischen Simulation an einem Punkt tangiert.
- Mit Short Payer-Swaptions werden die Zinsoptionen oberhalb dieses Punktes modelliert, mit Short Receiver-Swaptions unterhalb.
- Für die Swaptions wird ein Gitter aus verschiedenen Kombinationen von Festzinssatz, Ausübungszeitpunkt und Laufzeit des Swap-Underlyings aufgespannt.
- Dadurch wird zum einen die Zinsabhängigkeit des Kollektivs zu verschiedenen Zeitpunkten und zum anderen das Gedächtnis des Kollektivs modelliert. **Der Optimierungsalgorithmus soll aus diesem Gitter die passenden Instrumente auswählen...**

Wirkungsweise der Instrumente

Wirkungsweise der linearen Instrumente

Instrument	bedeutet	Relevant für	Einordnung
Payer Swap	BSK zahlt fix	Sparphase	Die BSK zahlt fixe Kupons (GHZ) an die Kunden
Receiver Swap	BSK empfängt fix	Darlehensphase	Die BSK empfängt fixe Kupons (DZ) vom Kunden

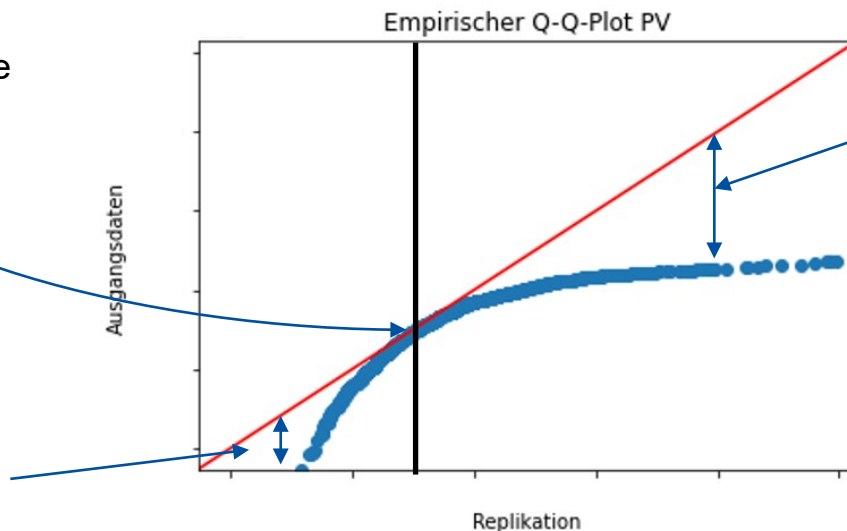
Wirkungsweise der nicht-linearen Instrumente; Beispiel Fortsetzeroption

Kundenoption	Instrument	BSK	bedeutet	Relevant für	Einordnung
Fortsetzeroption	Receiver Swaption	Short	BSK zahlt fix	Niedrige Zinsen	wenn die Kunden bei fallenden Zinsen länger in der Sparphase bleiben, muss die BSK länger fix zahlen (Guthabenzinsen)
Fortsetzeroption	Payer Swaption	Short	BSK empfängt fix	Hohe Zinsen	wenn die Kunden bei steigenden Zinsen schneller die Zuteilung annehmen, werden Payer Swaps kompensiert

Graphische Darstellung der Wirkungsweisen

Wahl des Swap-Festzinses erfolgt so, dass die **blaue** Linie die **rote** Linie tangiert

Mit Short Receiver-Swaptions wird die **blaue** Linie „unterhalb“ des Tangential-Punktes auf die **rote** Linie geschoben



Mit Short Payer-Swaptions wird die **blaue** Linie oberhalb des Tangential-Punktes auf die **rote** Linie geschoben

Ergänzende Filter notwendig

- Definierte Replikationsuniversen enthalten sehr viele Instrumente
- Die Cash Flows vieler dieser Instrumente sind über den Marktzins hochkorreliert
- Damit besteht ein hohes Risiko
 - einer Überparametrisierung
 - instabiler Schätzwerte (Multikollinearität)
 - eines zu komplexen Replikationsuniversums mit sich wechselseitig aufhebenden Optionen
- Lösung: Entwicklung eines Filteralgorithmus

Eigenschaften des Filteralgorithmus

- Die entwickelten Filter entfernen immer prioritär optionale Long-Positionen, dann optionale Short-Positionen und erst im letzten Schritt Instrumente ohne Optionen. Das finale Optionsportfolio soll so klein wie möglich sein und keine Long-Positionen mehr enthalten.
- Die verwendeten Filter wenden folgende Reduktions-Kriterien an:
 - Werden Optionen nie oder immer in den zugrunde liegenden Szenarien ausgeübt?
 - Sind die Betas signifikant (p-Werte)?
 - Sind Korrelationen bzw. VIF-Werte über vorgegebenen Schwellenwerten?
- Wurden alle Filter angewendet, werden evtl. noch vorhandenen Long-Positionen entfernt. Dadurch können im Regelfall auch korrespondierende Short-Positionen noch entfernt werden.

Optimierung unter Nebenbedingungen

- Die Konvexität des Bausparkollektivs ist an den Zinsrändern am extremsten. Aber gerade diese Ränder sind für die Risikomessung oft besonders wichtig (z.B. +/- 200 BP Zinsschock).
- Daher erfolgt im finalen Schritt eine Optimierung unter Nebenbedingungen
- Hierbei wird der Cash Flow-MSE minimiert unter der Nebenbedingung, dass die mittleren Barwerte für Basis- und Extrem-Zinsszenarien für Replikationsportfolio und Bauspartechnische Simulation innerhalb eines vorgegebenen Toleranzbereichs übereinstimmen.
- Durch diese Kalibrierung wird sichergestellt, dass innerhalb des für die regelmäßige Steuerung relevanten Zinsbereichs keine signifikanten Verzerrungen bestehen.
- Aufgrund des verwendeten Szenario-Generators wird teilweise noch ein Upsampling angewendet, um das Replikationsportfolio auch bzgl. der 1% extremsten Szenarien weitgehend verzerrungsfrei zu kalibrieren.

Ergebnisbeispiel: Zinsszenarien

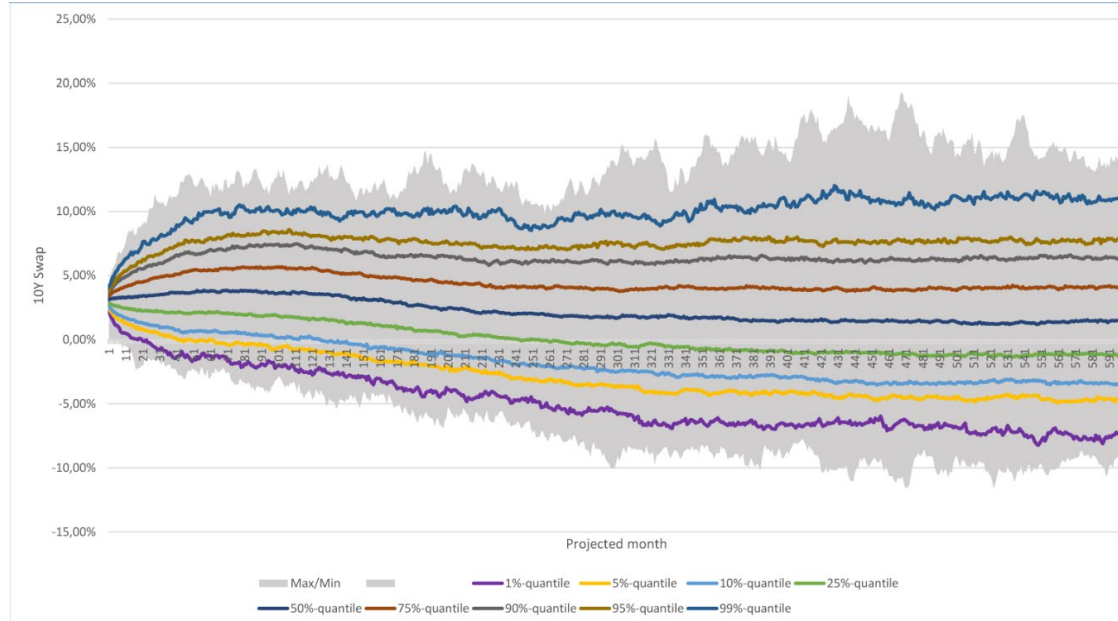


Fig.3 Interest rate bandwidth of the base scenario set

Ergebnisbeispiel: Synthetische Cash Flows

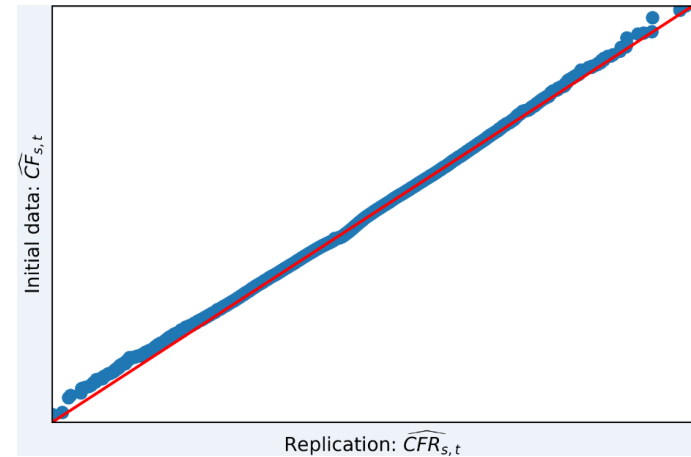
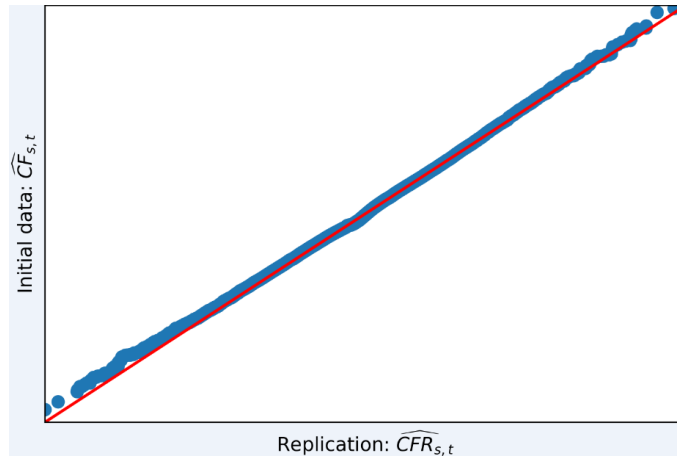


Fig.4 QQ-Plot of the synthetic swap cash flows against repliactaion cash flows (left: calibration scenarios, right: validation scenarios)

Ergebnisbeispiel: Barwerte

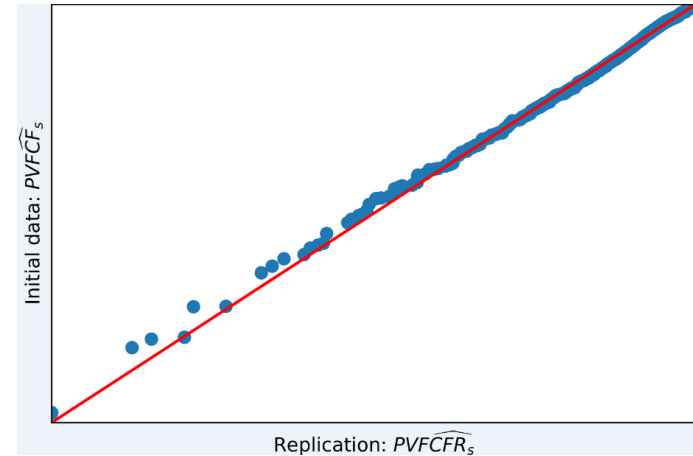
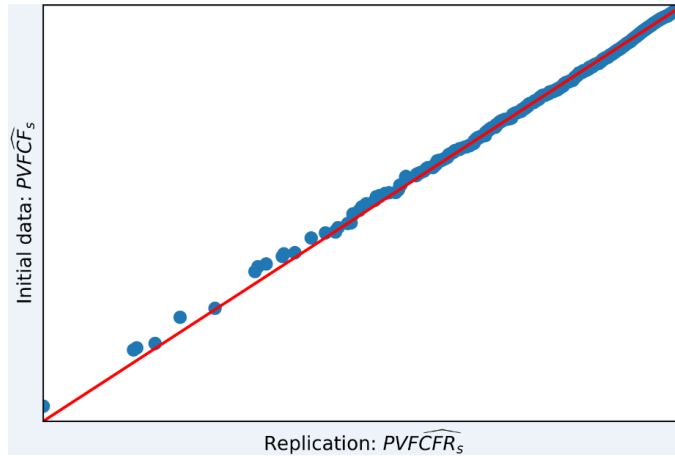


Fig.5 QQ-Plot of the synthetic swap PVs against repliactaion PVs (left: calibration scenarios, right: validation scenarios)

**Vielen Dank
für Ihre
Aufmerksamkeit.**

Tobias Hessenauer, Bausparkasse Schwäbisch Hall AG
Josef Schürle, Hochschule Reutlingen

DAV/DGVFM
Jahrestagung
2026

**Besuchen Sie
unsere Webseite**

www.aktuar.de
