Too big to fail? Was uns zufällige Netzwerke über Finanzkrisen sagen

Prof. Dr. Nils Detering
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

DAV/DGVFM Jahrestagung, Bonn 28.4.2025

Contents

Lehman Pleite September 2008

Figure: Quelle: npr.org

...mit sofortigen Auswirkungen auch in Deutschland

- Rettung Hypo Real Estate, IKB, Commerzbank,...
- Merkel und Steinbrück beruhigen: "Die Anlagen sind sicher"
- SoFFin (Sonderfonds Finanzmarktstabilisierung)
- Wertpapierkaufprogramme des Eurosystems,...
- ...

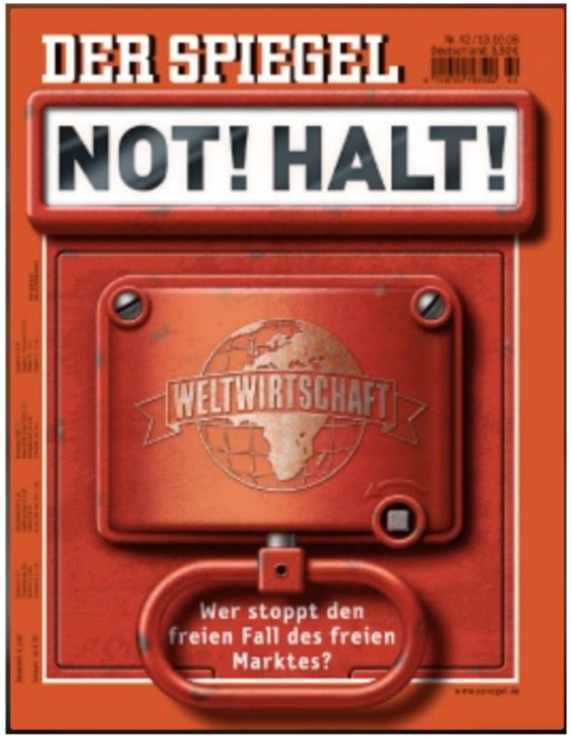


Figure: Quelle: www.spiegel.de

Warum Banken retten?

Figure: Quelle: Analyst's Digest

Noch immer aktuell: Bankenkrise in 2023

Auch heute ist der Finanzmarkt noch anfällig und oft auf staatliche Hilfen angewiesen:

- Gestiegene Zinsen machen 2022 und 2023 langfristige festverzinsliche Anlagen billiger. Zusätzlich stoppen Zentralbanken Ankauf von Wertpapieren.
- Wertverluste mancher Banken werden öffentlich und führten zu klassischem Bankrun bei mehreren amerikanischen Regionalbanken.
- 8.3.2023 Silvergate Bank wird geschlossen, 10.3.2023 Silicon Valley Bank wird geschlossen, 12.3.2023 Signature Bank wird geschlossen. 1.5.2023 First Republic Bank wird geschlossen.
- Einlagengarantien für einzelne amerikanische Banken und weltweit Markteingriffe zur Stabilisierung (Bereitstellung zusätzlicher Liquidität)
- Schweizer Bundesrat macht vom 15.3.-19.3.2023 Liquiditätszusagen an Credit Suisse und kann damit einen Konkurs abwenden und eine Übernahme von Credit Suisse durch UBS ermöglichen.

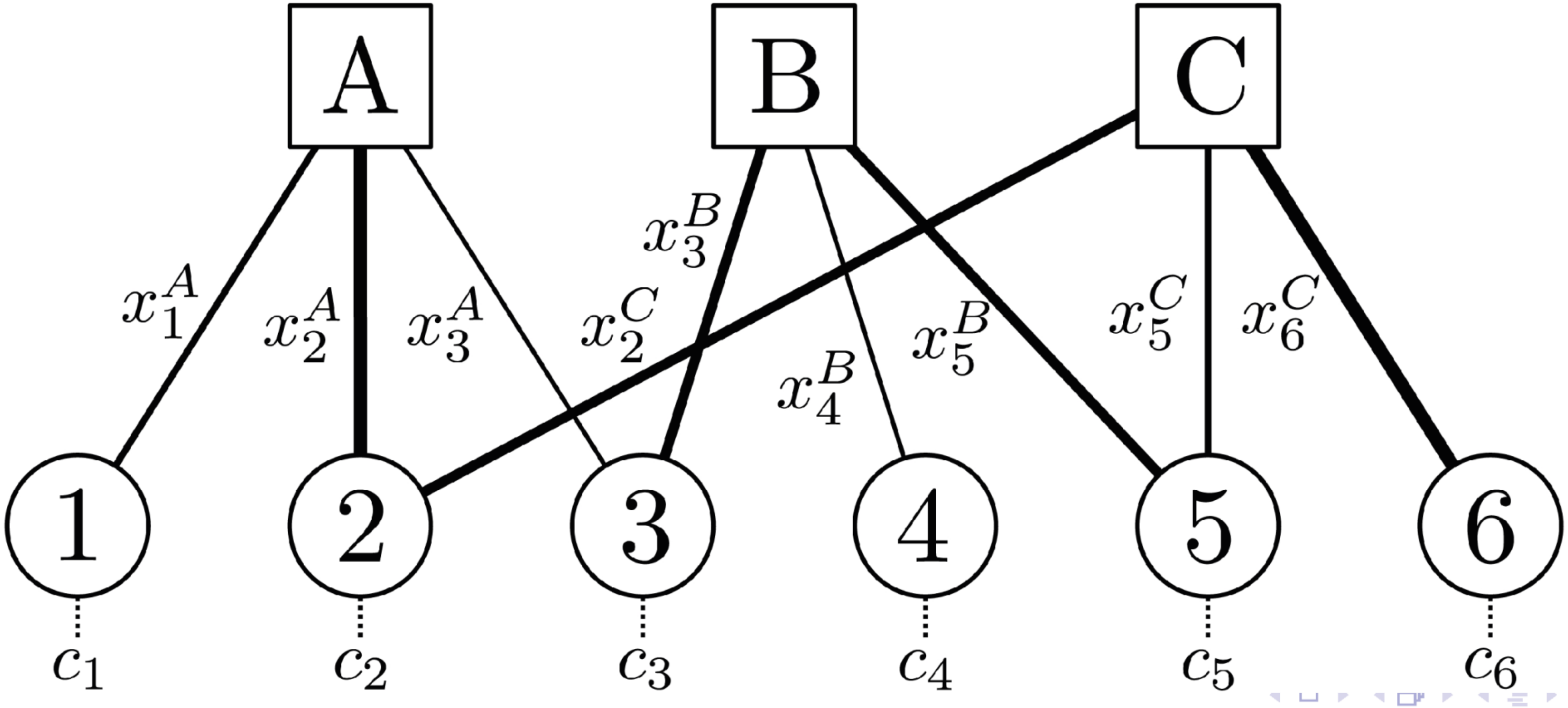
Contents

Systemisches Risiko Finanzsystem

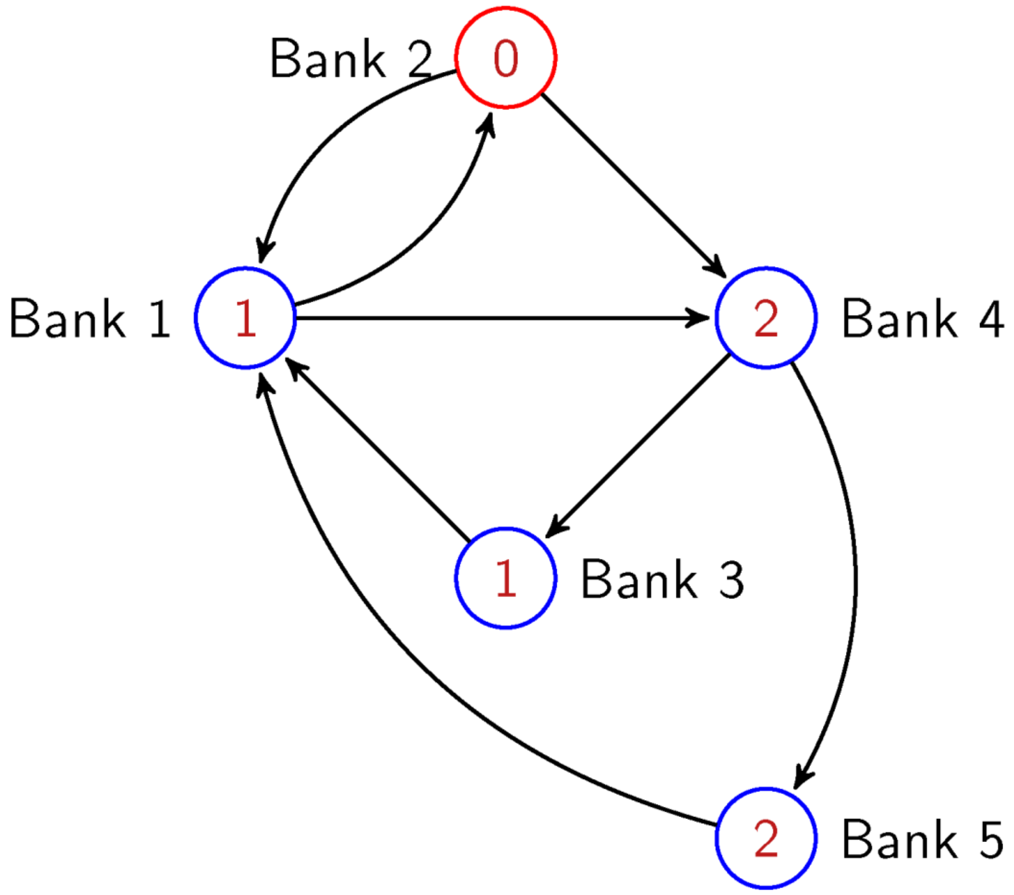
- Systemisches Risiko: Risiko, dass ein zunächst lokaler Schock substantielle Auswirkungen auf das ganze Finanzsystems oder sogar die Realwirtschaft hat.
- Die Finanzkrise hat gezeigt, dass traditionelles Risikomanagement von Banken Ansteckungseffekte unzureichend berücksichtigt.
- Eine Möglichkeit diese Ausbreitungsspiralen zu modellieren ist mit Hilfe von Netzwerken.
- Krisen breiten sich auf unterschiedliche Weise aus: Klassische Pleitespiralen sind nur ein Beispiel. Ausbreitung durch gemeinsame Investments, Fire Sales,....

Beispiel Ausbreitung durch Fire Sales

1. Finanzinstitute mit (Liquiditäts-)Problemen verkaufen Vermögenswerte (Anleihen, Aktien,..).
2. Wert dieser Vermögenswerte sinkt, andere Institute, die die gleichen Vermögenswerte halten, verlieren ebenfalls.
3. Um ihr Verhältnis von Eigenkapital und risikobehafteten Vermögenswerten wieder zu erhöhen, müssen sie nun ebenfalls Vermögenswerte verkaufen, ...



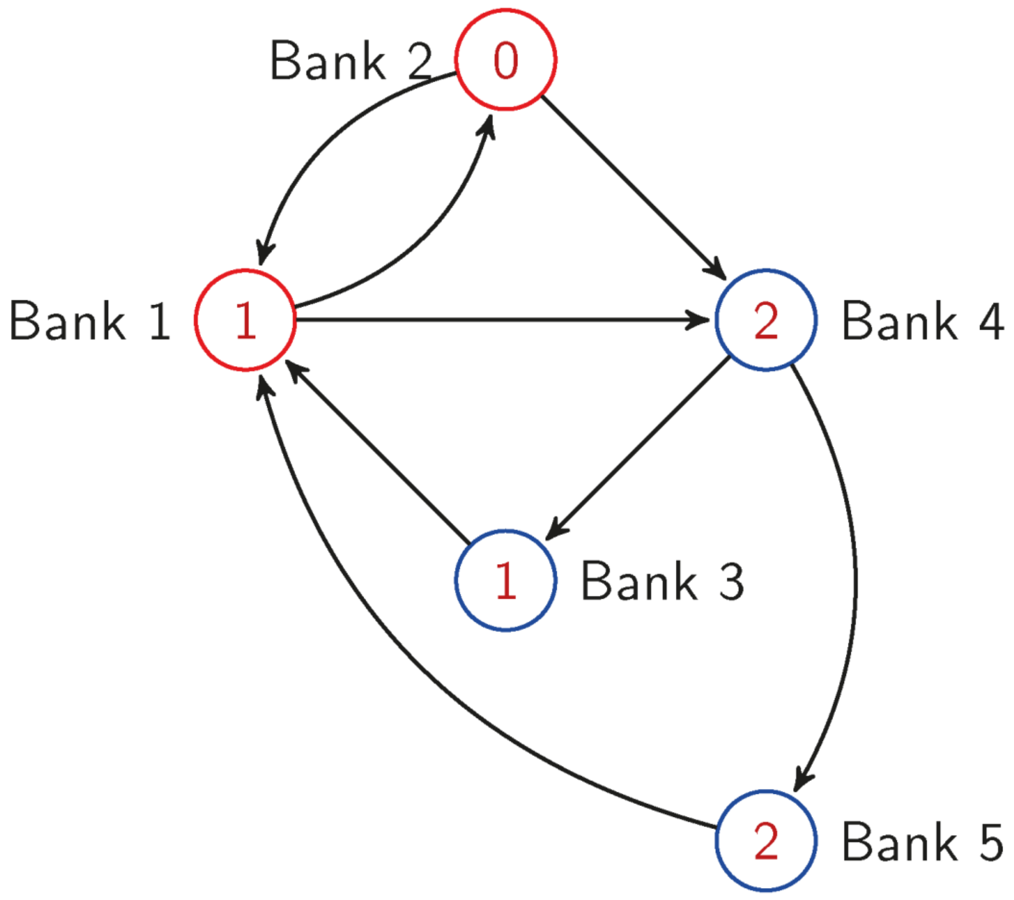
Beispiel Ausbreitung durch Pleitespirale



$$\mathcal{A}_0 \quad = \quad \{2\}$$

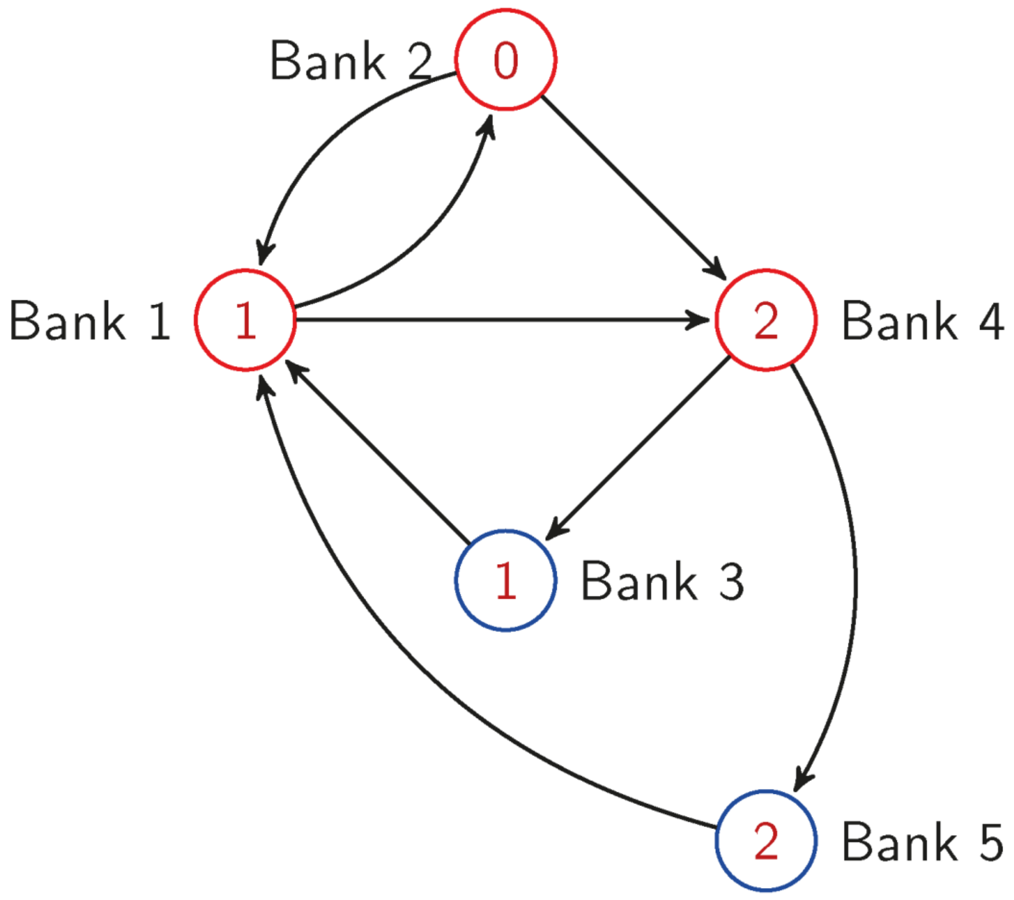
Zum Resultat

Beispiel Ausbreitung durch Pleitespirale



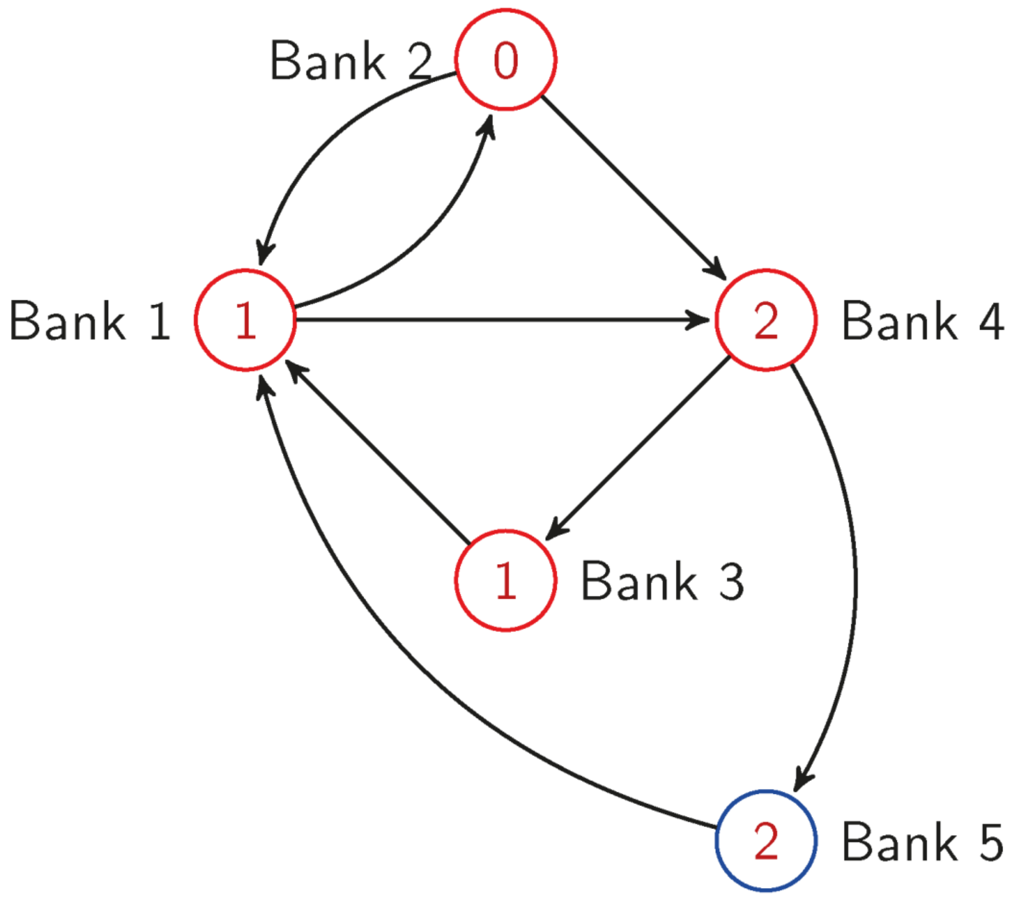
$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \{2\} \\
\mathcal{A}_1 &= \{2, 1\}
\end{aligned}
$$

Beispiel Ausbreitung durch Pleitespirale



$$\mathcal{A}_0 = \{2\}$$
$$\mathcal{A}_1 = \{2, 1\}$$
$$\mathcal{A}_2 = \{2, 1, 4\}$$

Beispiel Ausbreitung durch Pleitespirale



$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= \{2\} \\
\mathcal{A}_1 &= \{2, 1\} \\
\mathcal{A}_2 &= \{2, 1, 4\} \\
\mathcal{A}_3 &= \{2, 1, 4, 3\}
\end{aligned}
$$

Wann ist ein Finanznetzwerk stabil?

Sind Banken wirklich *Too big to fail*?

Eine Antwort mit Hilfe von zufälligen Netzwerken...

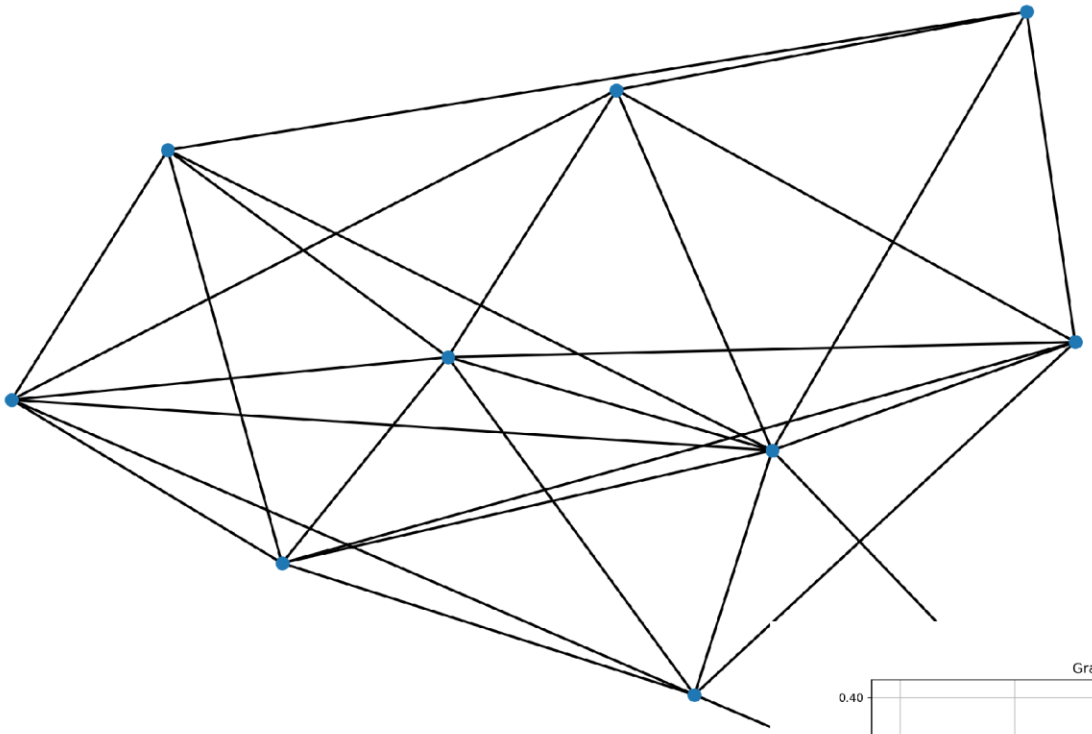
Warum zufällige Netzwerke?

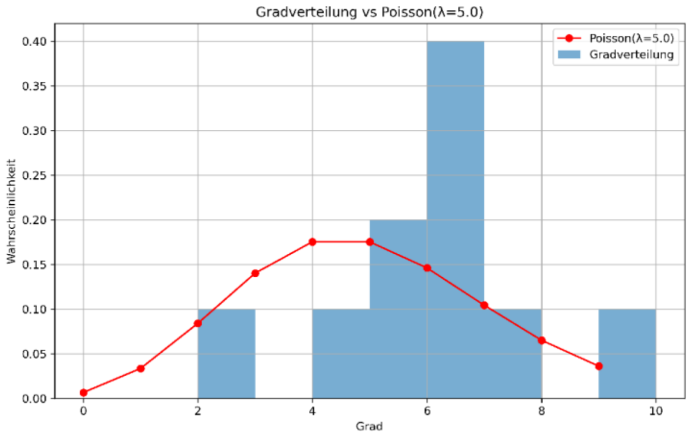
- Möglichkeit Netzwerk G mit Knotenmenge $[n] := \{1, ..., n\}$ (zum Beispiel Banken/Versicherungen/Finanzinstitute) zu erzeugen.
- Geeignete Spezifikation erlaubt es Netzwerke mit bestimmten statistischen Eigenschaften zu erzeugen: Die Netzwerke sehen dann einem echten Finanznetzwerk ähnlich.
- Oft analytische Resultate $n \to \infty$ möglich.

Einfaches Beispiel:

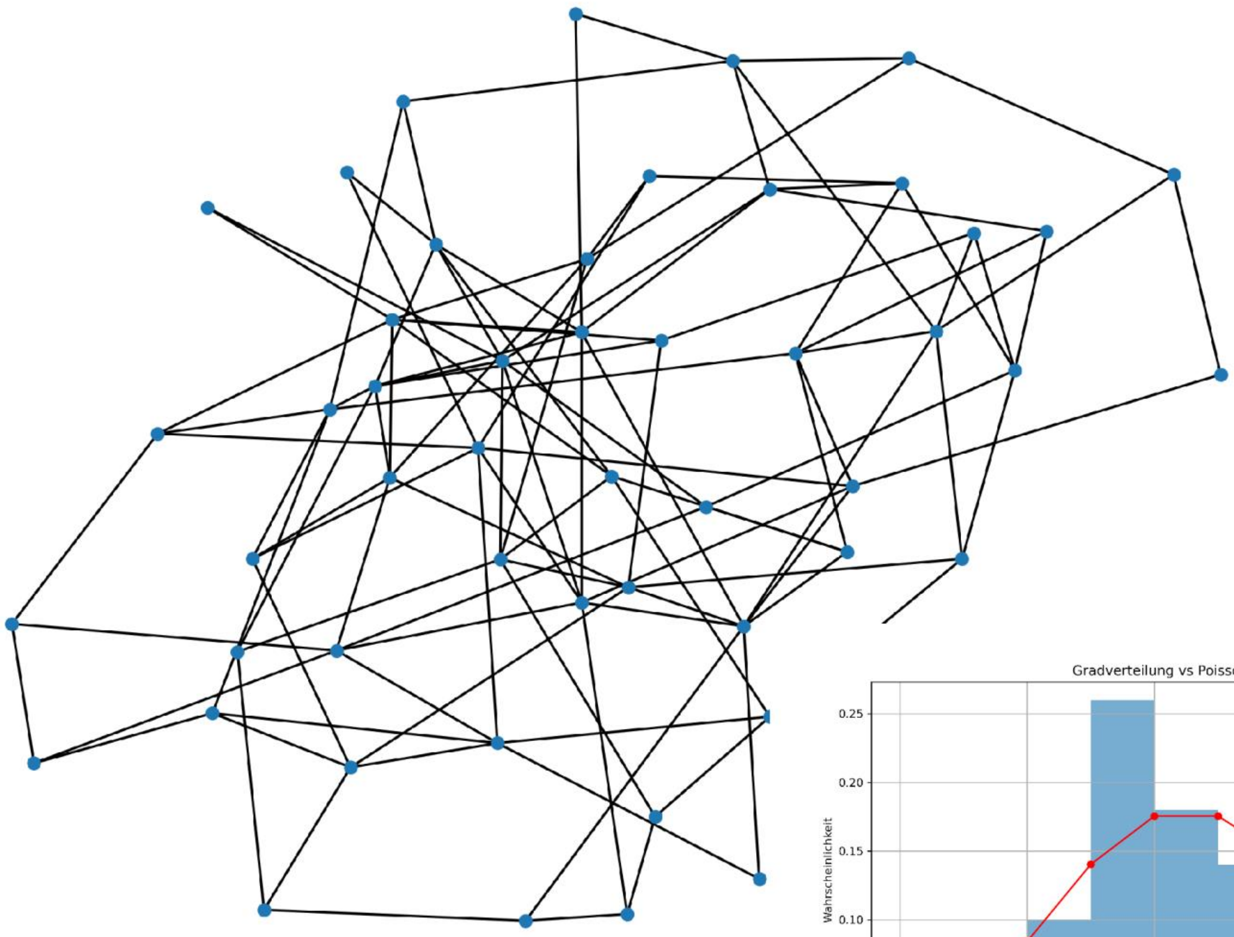
- Erdös-Rényi graph, n Knoten, jede Kante existiert unabhängig mit W-keit $p(n)$, z.B. $p(n) = c/n$, $c > 0$.

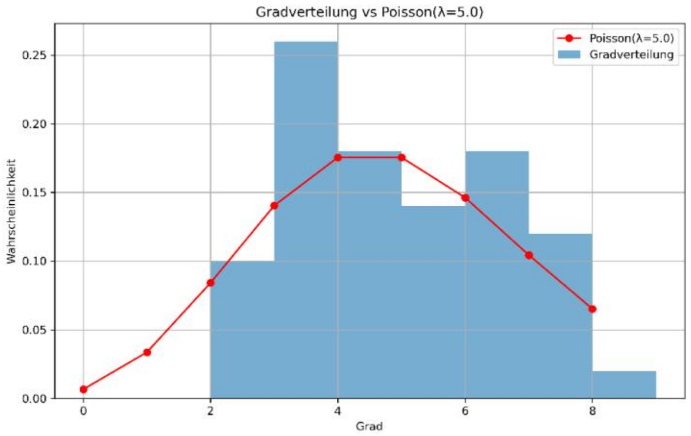
Beispiel Erdös-Rényi Zufallsgraph $p(n) = 5/n$



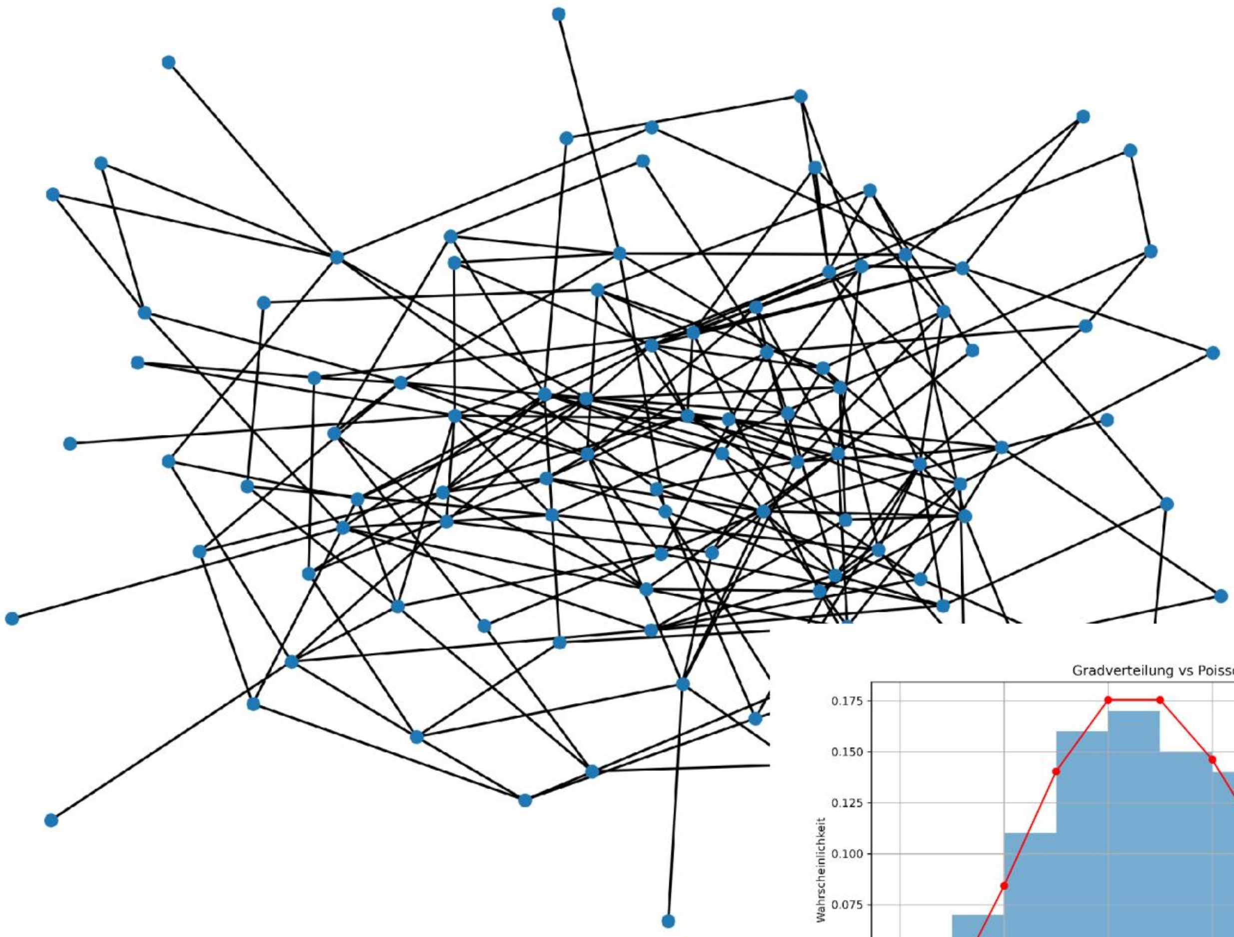


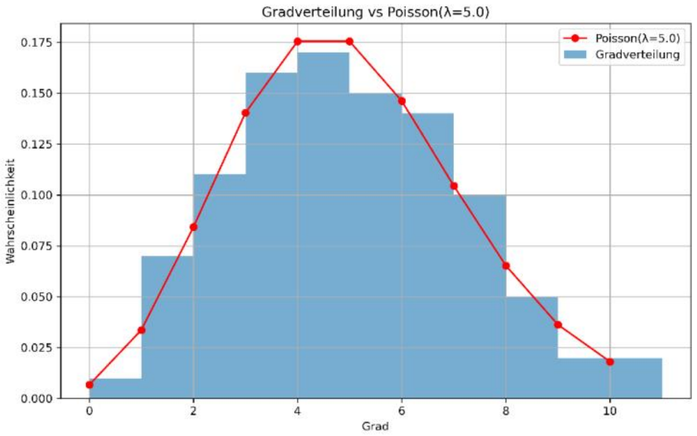
Beispiel Erdös-Rényi Zufallsgraph $p(n) = 5/n$



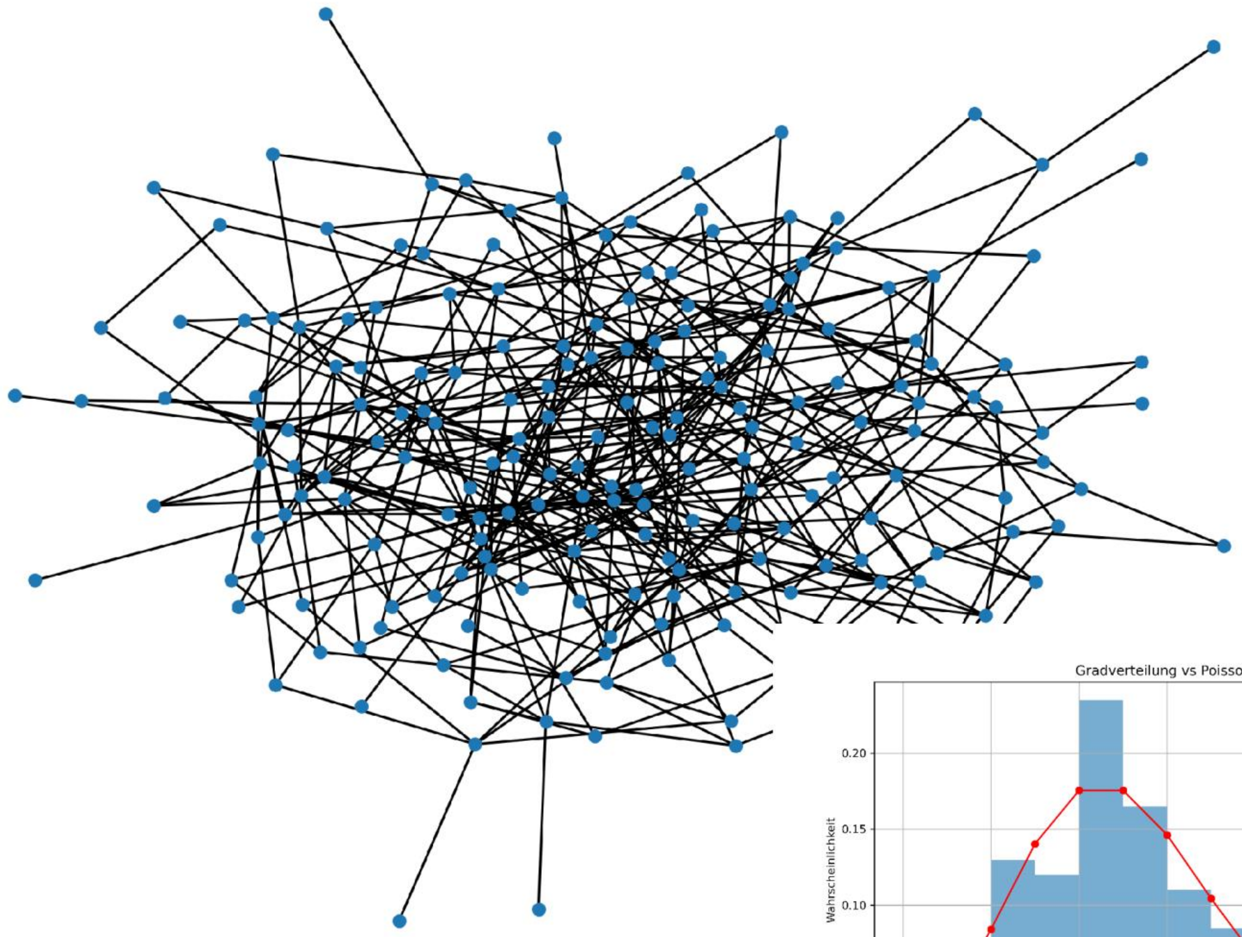


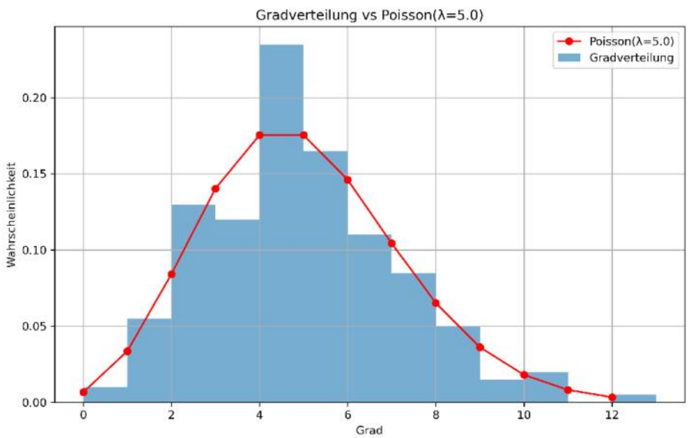
Beispiel Erdös-Rényi Zufallsgraph $p(n) = 5/n$



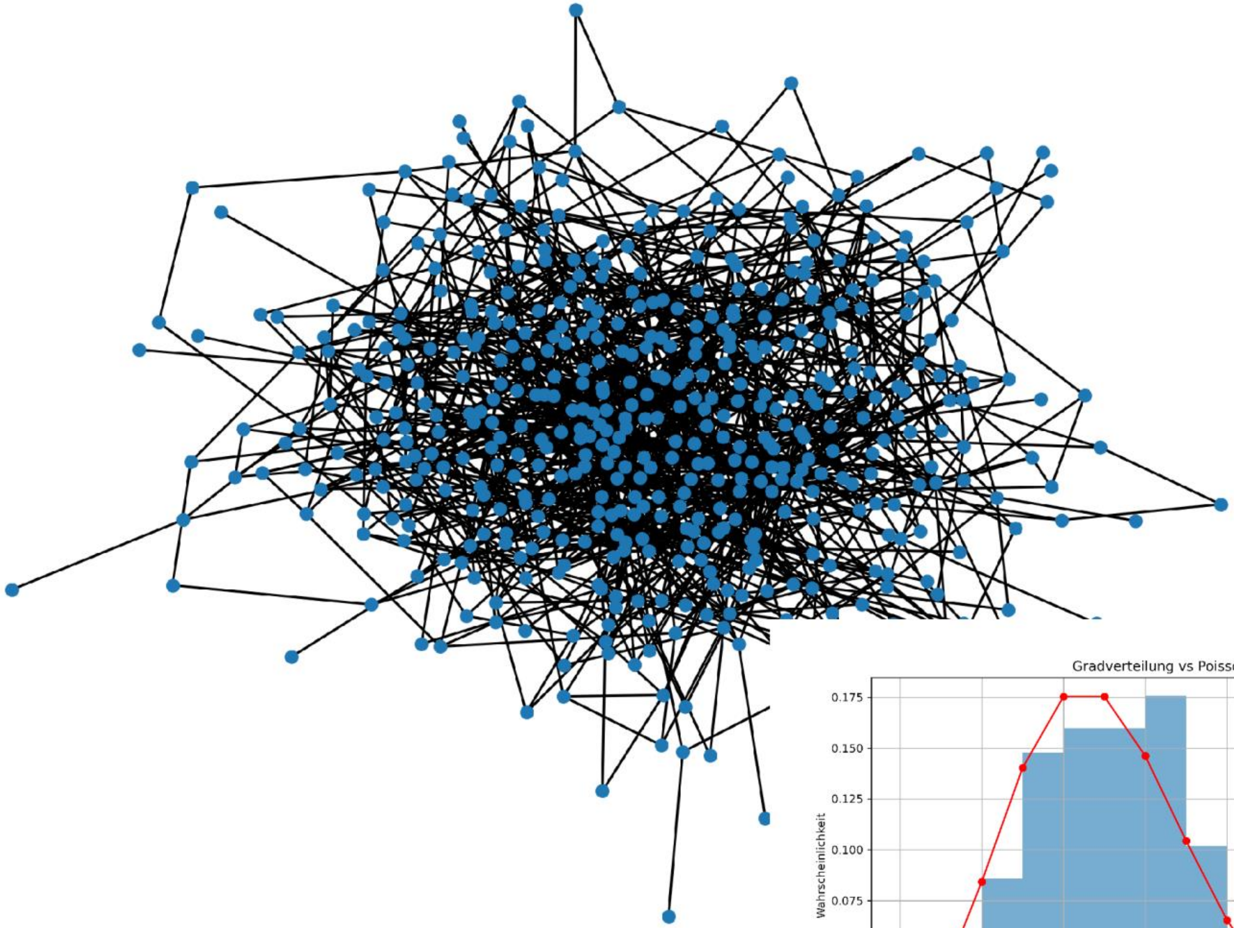


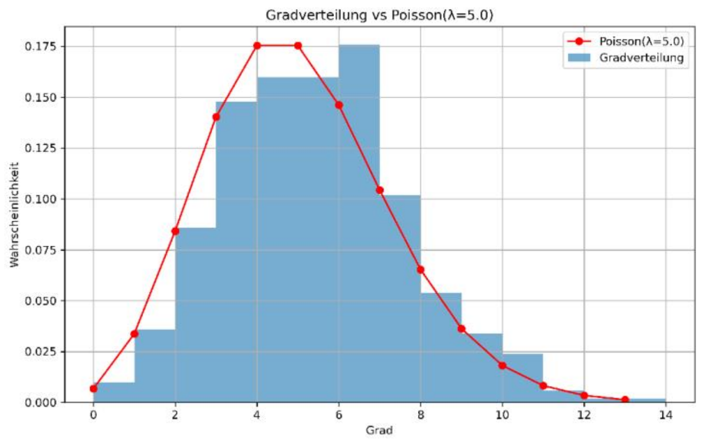
Beispiel Erdös-Rényi Zufallsgraph $p(n) = 5/n$



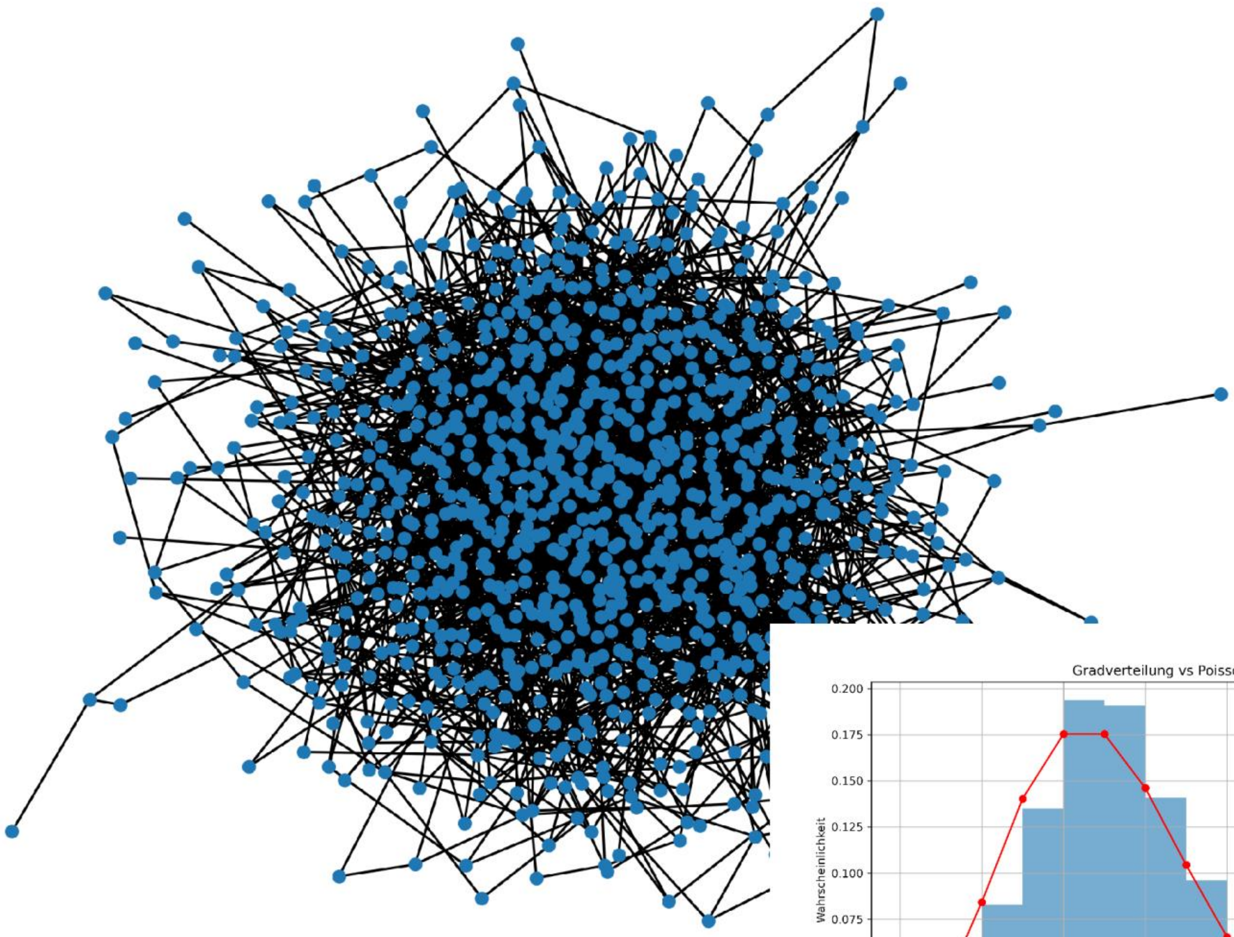


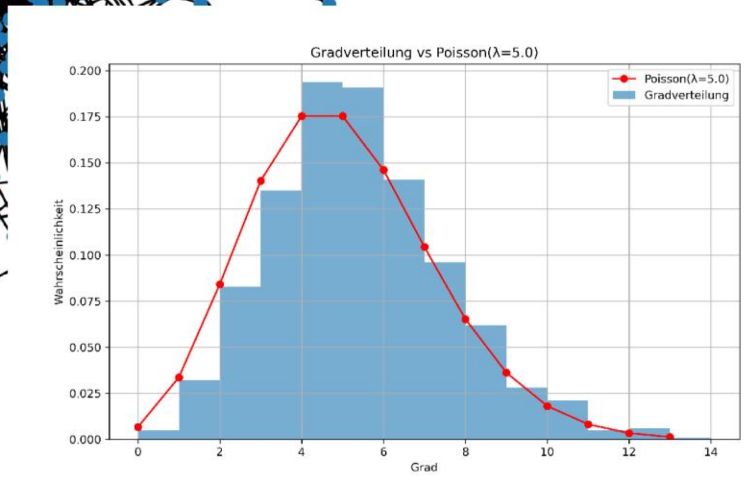
Beispiel Erdös-Rényi Zufallsgraph $p(n) = 5/n$





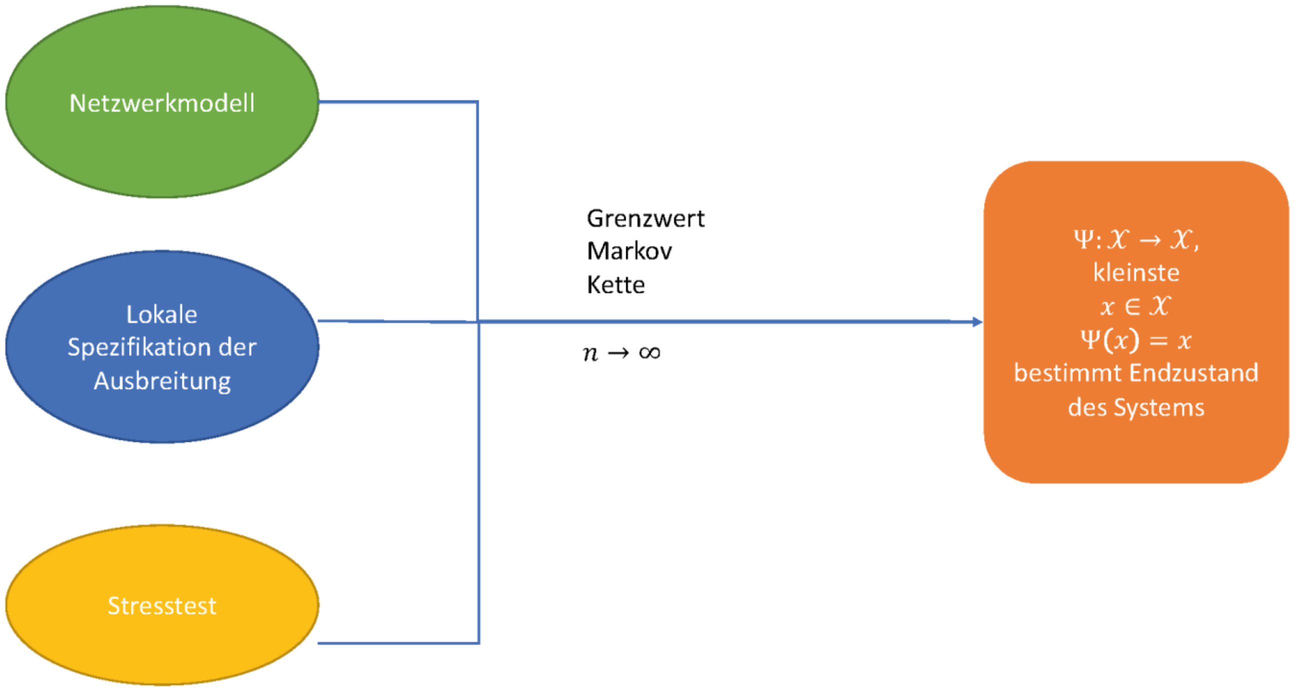
Beispiel Erdös-Rényi Zufallsgraph $p(n) = 5/n$





Contents

$n \to \infty$ Asymptotik zur Ausbreitung von Pleiten



- Dimension von $\mathcal{X}$ steigt mit Komplexität des Netzwerks,
- Oft $\mathcal{X} = \mathbb{R}^d$ oder $\mathcal{X} \subset \{f : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+\}$ für metrischen Raum $\mathcal{S}$,
- Fixpunkt $\hat{x}$ kann dann entweder analytisch untersucht oder mit numerischen Verfahren bestimmt werden.

Ein einfaches Beispiel

Der Prozess:

- Gerichteter Graph G mit Knotenmenge $[n] := \{1, \ldots, n\}$ (zum Beispiel Banken, Versicherungen,...)
- Ein Vektor mit Schwellenwerten $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$.
- Pleitebanken (Schock/Stresstest) $\mathcal{A}_0 := \{i \in [n] \mid c_i = 0\}$. Pleitebanken in der $k-$ten Generation

$$\mathcal{A}_k := \left\{ i \in [n] | N_G^-(i) \cap \mathcal{A}_{k-1}| \geq c_i \right\},$$

  wobei $N_G^-(i)$ die Schuldner von i.
- Sei $\mathcal{A}_n$ die Menge der Pleitebanken am Ende.

Ziel:

- Bestimme Anteil $n^{-1} |\mathcal{A}_n|$.
- Klassifizierung anfällig/robust,
- "Steuerung" des Netzwerks

▸ Zum Pleiteprozess

Zufallsgraph und Funktionale

- Zufälliges Netzwerk charakterisiert (im Grenzwert $n \to \infty$) durch Zufallsvektor (W^-, W^+, C). Hier
  - W^- die (erwartete) Anzahl der Schuldner,
  - W^+ die (erwartete) Anzahl der Gläubiger,
  - C der Schwellenwert (Kapital).

  von einem zufällig (gleichverteilt) ausgewählten Knoten.
- Wenn $\mathbb{P}(C = 0) > 0$, dann gibt es Banken die Pleite sind und Ausbreitung startet.

Bestimmen von $\mathcal{A}_n$

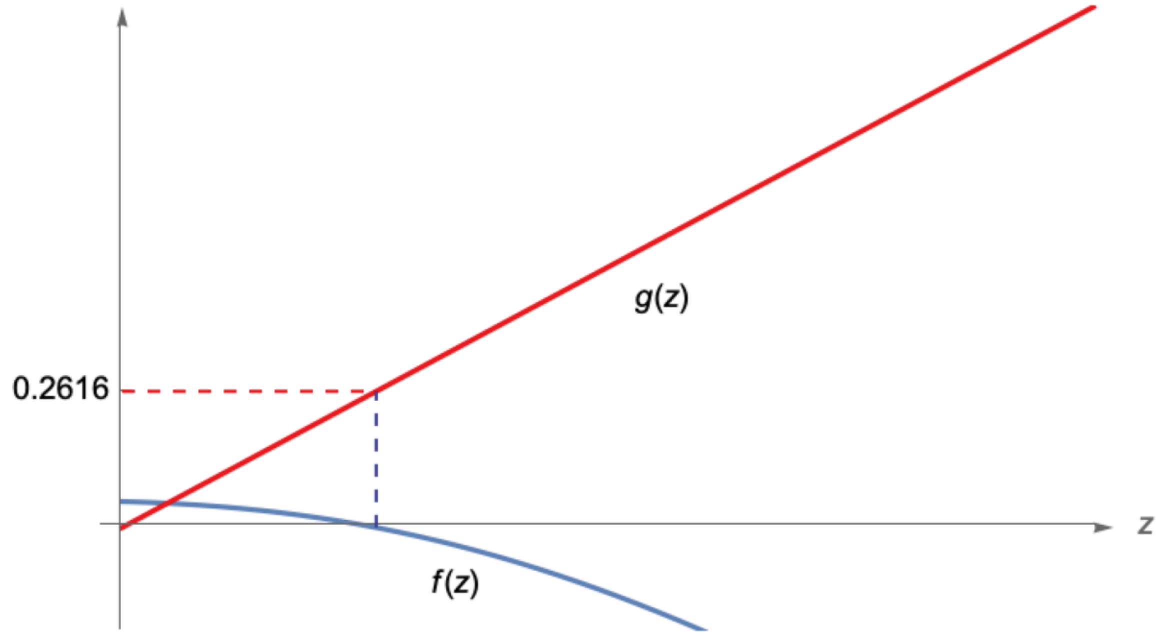
Man kann dann stetige Funktionen $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $f(0) > 0$ herleiten, die den ganzen Ausbreitungsprozess ($n \to \infty$) beschreiben. Die Funktionen f und g hängen von der Verteilung von (W^-, W^+, C) ab.

Theorem: Sei $\mathbb{P}(C = 0) > 0$ und $\hat{z}$ die erste Nullstelle von f und sei $f'(\hat{z}) < 0$. Dann gilt:

$$n^{-1} |\mathcal{A}_n| \xrightarrow{p} g(\hat{z}), \text{ für } n \to \infty.$$

Beispiel $\mathcal{A}_n$ im Erdös-Rényi Graphen

- In diesem Fall $W^- = W^+ = \sqrt{c}$.
- Wähle C mit $\mathbb{P}(C = 0) = \varepsilon$ und $\mathbb{P}(C = r) = 1 - \varepsilon$ für ein $r \in \mathbb{N}$.
- Dann folgt $f(z) = \varepsilon + (1 + \varepsilon)\mathbb{P}(\mathrm{Poi}(cz) \geq r) - z$ und $g(z) = z$.
- Mit $r = 2$ und $\varepsilon = 0.05$ erhalten wir $\mathcal{A}_n \approx 0.26$



Paretoverteilte Grade durch Wahl von W^- und W^+

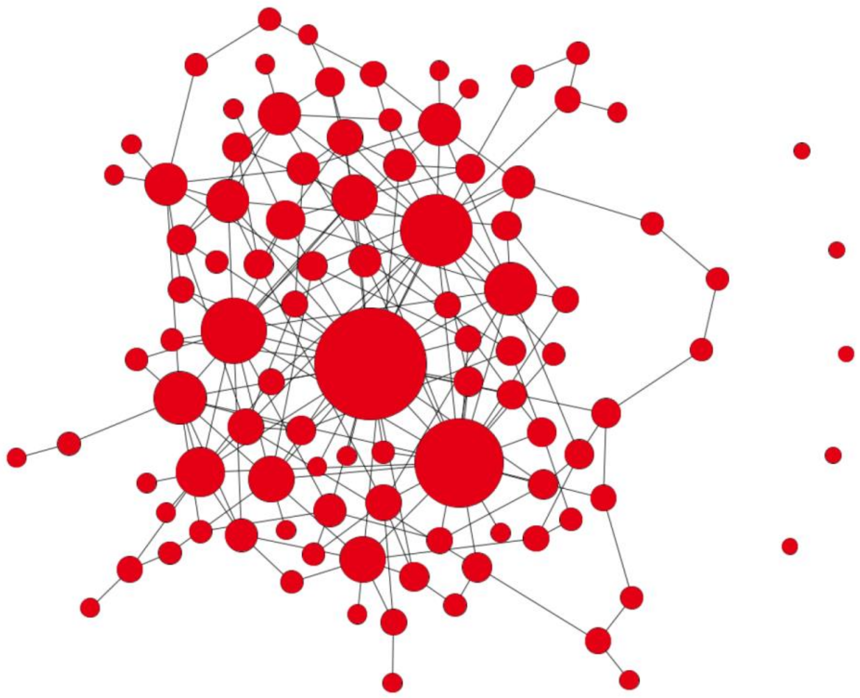
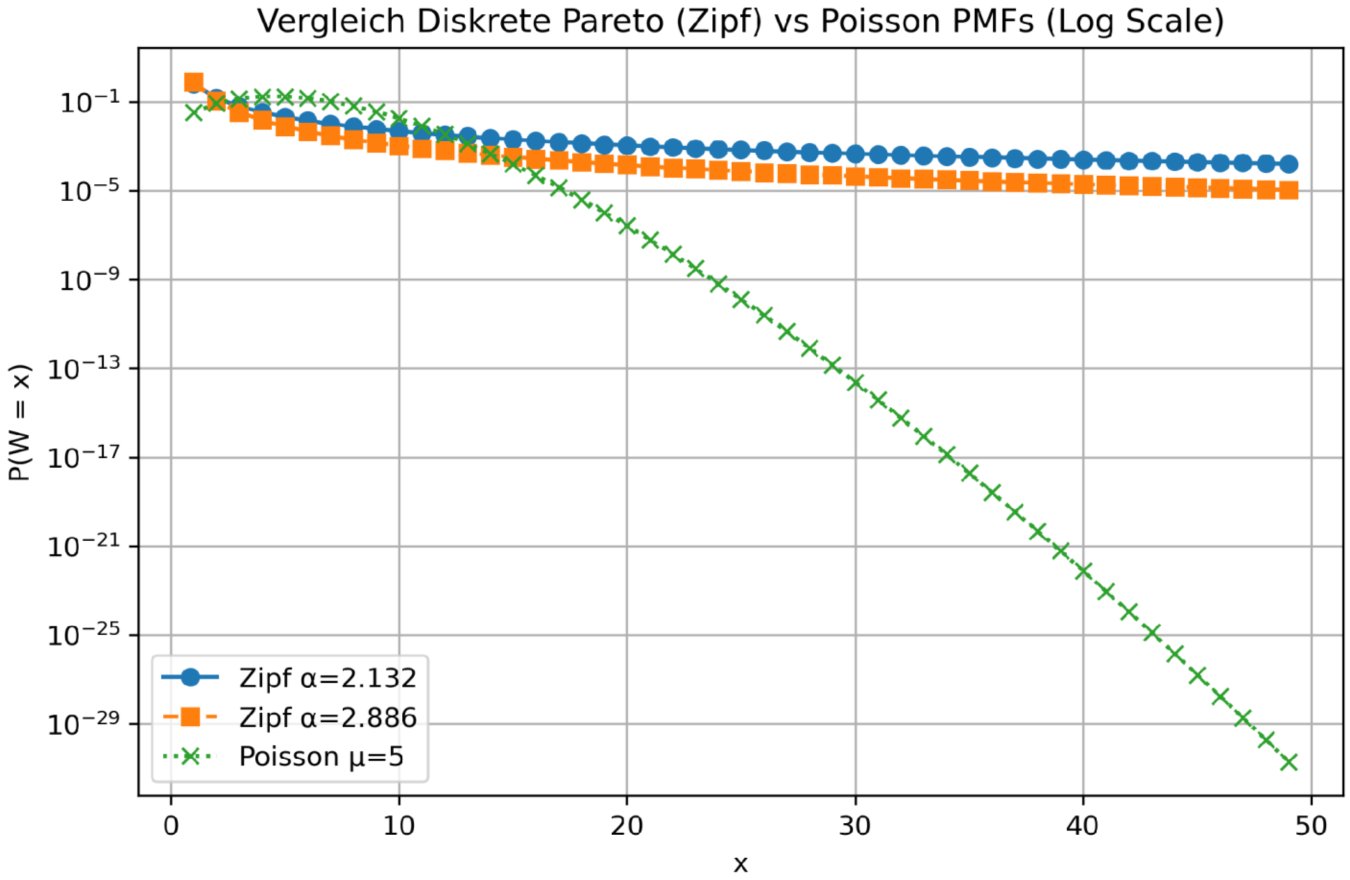


Figure: Inhomogenene Zufallsgraphen mit Paretoverteilten Graden mit Parameter 2.5 (kein zweites Moment). Knotengrösse in Abhängigkeit des Grades.

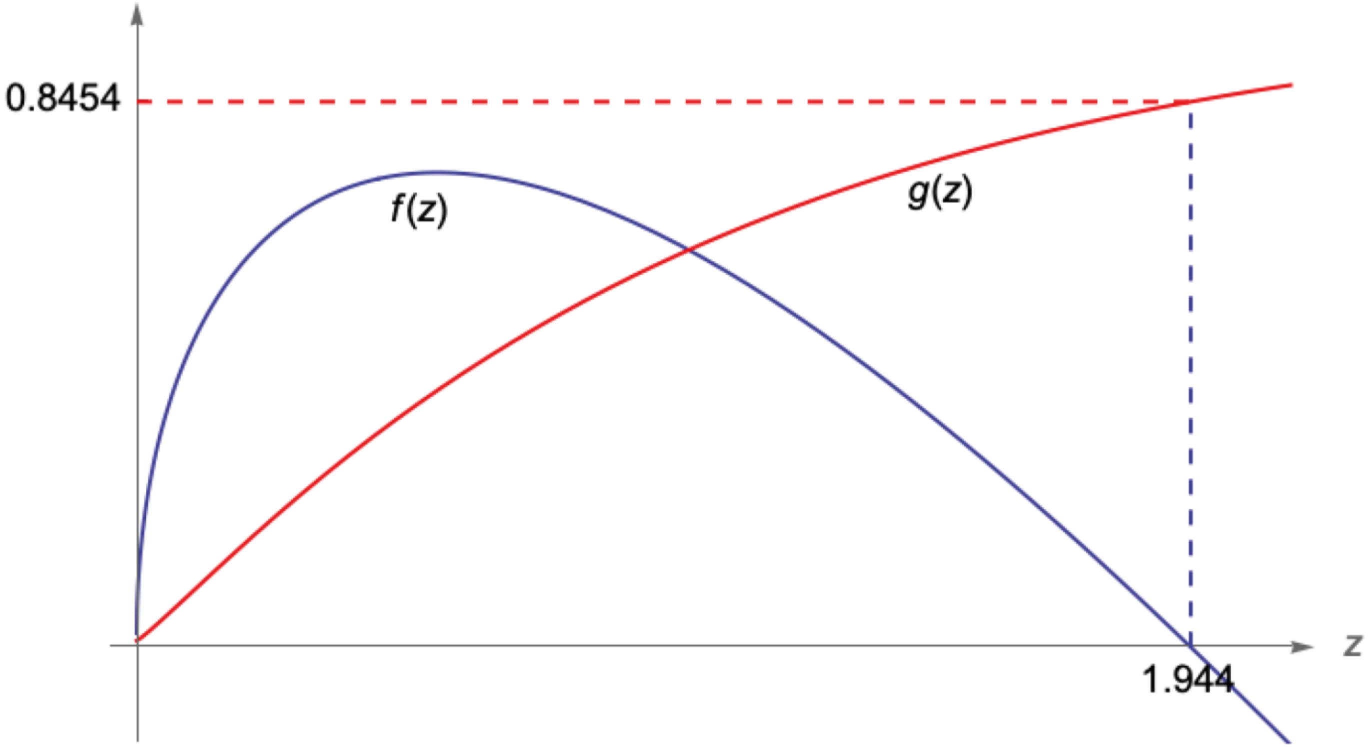
Beispiel $\mathcal{A}_n$ bei Paretoverteilten Graden

- Für das Österreichische (Boss et al. (2004)) und Brasilianische Bankennetz (Cont et al. (2013)) wurden Paretoverteilte Grade beobachtet mit Parametern in $(2, 3)$.



Beispiel $\mathcal{A}_n$ bei Paretoverteilten Graden

- Paretoverteilte Grade können zu deutlich stärkeren Ausbreitungseffekten führen, selbst bei insgesamt wenigen Kanten.
- Wahl von $\mathbb{P}(C = 0) = 0.01$ und $\mathbb{P}(C = 2) = 0.99$ führt zu $\mathcal{A}_n \approx 0.84$.



Anfällige/robuste Netwerke

Wann breiten sich *kleine* Schocks aus?

- Zunächst $\mathbb{P}(C = 0) = 0$, also keine Pleiten.
- Stresstest: Lasse einige Banken pleite gehen:
  - Bank $i \in [n]$ bekommt Marker m_i, entweder 0 (pleite) or 1 (unverändert), neuer Schwellenwert $c_i m_i$

$$(W^-, W^+, C) \xrightarrow[C_M := CM]{\text{Stressszenario}} (W^-, W^+, C_M)$$

- Sei $\mathbb{P}(C_M = 0) > 0$:
  - Wann ist $n^{-1} |\mathcal{A}_n|$ von unten beschränkt unabhängig von M? (anfälliges Netzwerk)
  - Wann ist $n^{-1} |\mathcal{A}_n|$ klein sofern $\mathbb{P}(C_M = 0)$ klein ist? (robustes Netzwerk)

Anfälliges Netzwerk

Theorem: Sei (W^-, W^+, C) so dass
$$f^{'}(0) > 0.$$
Dann existiert $\Delta > 0$ so dass für alle C_M mit $\mathbb{P}(C_M = 0) > 0$ mit hoher W-keit
$$n^{-1}\left|\mathcal{A}_n\right| \geq \Delta.$$

Too big to fail!

Robustes Netzwerk

Theorem: Sei (W^-, W^+, C) so dass

$$f^{'}(0) < 0.$$

Dann ex. zu jedem $\varepsilon > 0$, ein δ so dass für $\mathbb{P}(C_M = 0) \leq \delta$ mit hoher W-keit

$$n^{-1} |\mathcal{A}_n| \leq \varepsilon.$$

Weitere Fragestellungen die wir untersucht haben

1. Systemisches Risikomanagement:
   - Fragesstellung: Bestimme Schwellenwerte $(c_i)_{i\in[n]}$ auf Basis von beobachteten Netzwerkgrössen um Robustheit zu erzeugen.
   - Beobachteten Netzwerkgrössen: Grade $(d_i^-)_{i\in[n]}$ und $(d_i^+)_{i\in[n]}$.
   - In Abhängigkeit von dem Vektor (W^-, W^+, C) kann man dann Schwellenwert für c_i als Funktion von d_i^- finden der Robustheit garantiert.
2. Kapital/Kredite:
   - Eigentlich keine Schwellenwerte sondern Kredite $E = \{E_{ij}\}_{i,j\in[n]}$ $(E_{i,j} \in \mathbb{R}_+)$ und Kapital $\nu = (\nu_1, \ldots \nu_n)$.
   - Alternativ Kapitalanforderungen basierend auf $E = \{E_{ij}\}_{i,j\in[n]}$ $(E_{i,j} \in \mathbb{R}_+)$ und $\nu = (\nu_1, \ldots \nu_n)$.

Resultate basieren auf Teilen von:

- *Bootstrap percolation in Inhomogeneous directed random graphs* (zusammen mit T. Meyer-Brandis und K. Panagiotou), Electronic Journal of Combinatorics, 26(3) page 1-43, (2019).

und ein wenig:

- *Managing Systemic Risk in Financial Networks* (zusammen mit T. Meyer-Brandis, K. Panagiotou and D. Ritter), SIAM Journal on Financial Mathematics, 10(2) page 578-614, (2019).

Erweiterungen

Die vorgestellte Arbeit kann erweitert werden:

- Allgemeinere Netzwerkstruktur:
  - *Financial Contagion in a Stochastic Block Model*, (mit T. Meyer-Brandis, K. Panagiotou and D. Ritter), International Journal of Theoretical and Applied Finance, 23(08), (2020).
  - *Optimal Support for Distressed Subsidiaries – a Systemic Risk Perspective* (mit M. Bichuch), eingereicht (2024)
  - Bootstrap Percolation in Random Graphs of Unbounded Rank (mit J. Lin), eingereicht (2024)

Netzwerke mit mehreren Blöcken

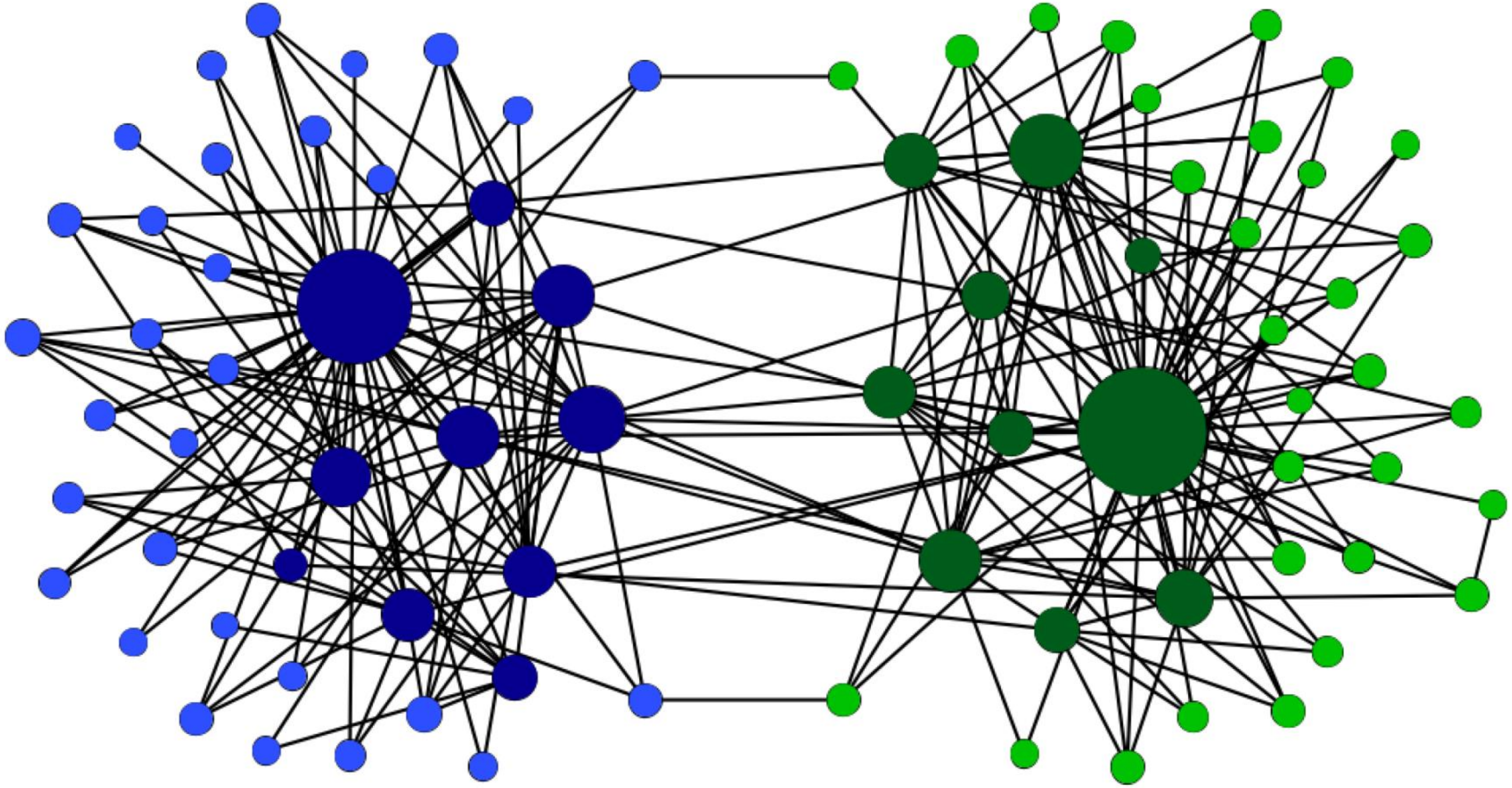


Figure: Ein Zufallsgraph mit zwei Blöcken (blau und grün). Knotengrösse skaliert mit Grad.

Erweiterungen

Die vorgestellte Arbeit kann erweitert werden:

- Allgemeinere Netzwerkstruktur:
  - *Financial Contagion in a Stochastic Block Model*, (mit T. Meyer-Brandis, K. Panagiotou and D. Ritter), International Journal of Theoretical and Applied Finance, 23(08), (2020).
  - *Optimal Support for Distressed Subsidiaries – a Systemic Risk Perspective* (mit M. Bichuch), eingereicht (2024)
  - Bootstrap Percolation in Random Graphs of Unbounded Rank (mit J. Lin), eingereicht (2024)
- Unter Berücksichtigung von Firesales:
  - *An Integrated Model for Fire Sales and Default Contagion in Financial Systems*, (mit T. Meyer-Brandis, Panagiotou and Ritter), Math Fin. Econ 15, p. 59-101 (2021)

References I

Michael Boss, Helmut Elsinger, Martin Summer, and Stefan Thurner. Network topology of the interbank market. *Quantitative Finance*, 4(6):677–684, 2004.

Rama Cont, Amal Moussa, and Edson Santos. Network structure and systemic risk in banking systems. In Jean-Pierre Fouque and Joseph Langsam, editors, *Handbook on Systemic Risk*, pages 327–368. Cambridge University Press, Cambridge, 2013.

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit!

Prof. Dr. Nils Detering
Department of Mathematics
Heinrich-Heine Universität
Düsseldorf
Germany

nils.detering@hhu.de