DAV/DGVFM
Herbsttagung
2025

Dr. Christian Lax, Dr. Lars Schmitz, ERGO

Stützung aus Tarifkollektiven

Methoden der Stützung von Tarifen mit geringem Bestand durch gleichartige Tarife

Herbsttagung, 17. November 2025

Agenda

Problemstellung

Ausgangslage

- **Auslaufende Bisex-Bestände** bei gleichzeitig noch nicht ausreichend besetzten Unisex-Beständen.
- **Schnellere Produktzyklen** mit einhergehenden Schließungen, bevor die Tarife größere Bestände aufbauen können.

Konsequenzen

- **Viele Tarife mit wenig Bestand**: Für viele Tarife Grundkopfschäden alleine aus eigenen Daten nicht herleitbar.
- **Wenige Tarife mit sehr viel Bestand**: Wenige oder keine Tarife mehr, die solitär zur Stützung anderer Tarife hinzugezogen werden können.

Lösungsmöglichkeit: Stützung über Tarifklassen

Problemstellung

Gegeben sei ein Tarif $\tau^{(1)}$, der nicht mehr alleine aus sich kalkuliert werden kann.

Stützung aus Tarifklassen

1. Bilde **geeignete Tarifklasse** $\left\{\tau^{(1)}, \ldots, \tau^{(n)}\right\}$.
2. Bilde eine **geeignete Grundkopfschadenreihe** $G_{t_1}, \ldots, G_{t_m}$ aus den Daten der Tarifklasse.
3. **Extrapoliere** diese und **skaliere** dann auf das Niveau des Zieltarifs (oder anders herum).

Unser Lösungsansatz

Ansatz

Benutze die klassische **Grundkopfschadenformel**, wobei

- die Schäden und Bestände der einzelnen Stütztarife **additiv** berücksichtigt werden,
- ein tarifabhängiger **Korrekturterm** in der Addition der (profilgewichteten) Bestände hinzugefügt wird.

Vorsicht!

Ohne Korrekturterme ist die Schätzung i.A. verfälscht.

- Das zeigt das folgende Beispiel.

Vorbemerkungen

Grundlagen des Vortrags

- **Idee**: Aus Diskussion mit damaligen Treuhänder Dr. E. Schneider und unter Mitwirkung von Dr. T. Gottschalk (Ergo) hergeleitet.
- **Formale Beweise**: Bachelorarbeit „*Stützverfahren für die Berechnung des Grundkopfschadens in der Privaten Krankenversicherung*“, Hannah Käsgen (2023).
  - Betreuung durch Prof. Dr. E. Cramer (RWTH Aachen) und Lax, Schmitz.
  - Weitere diverse Weiterentwicklungen u.a. durch Dr. J. Piontkowski (Ergo).

Vereinfachte Darstellung

- **Darstellung** (wie in Bachelorarbeit) meist **für nur zwei Tarife**.
- Sämtliche Aussagen sind vollkommen **analog auf** $n > 2$ **übertragbar**.

Agenda

Einleitung

Einführendes Beispiel

Ein mathematisches Modell

Fazit und Ausblick

Beispiel: Setting

Ziel

Tarif $\tau^{(1)}$ soll durch Tarif $\tau^{(2)}$ gestützt werden, indem Schaden- und Bestandsdaten **beider** Tarife genutzt werden.

Annahmen

- **Eigenschaften von Tarif $\tau^{(2)}$**:
  - Gleiches Profil und gleicher Trend (10% pro Jahr) wie $\tau^{(1)}$.
  - Doppelt so hohes Schadenniveau $\tau^{(1)}$.
  - Altersstruktur unterscheidet sich zwischen $\tau^{(1)}$ und $\tau^{(2)}$.
- **Vereinfachte Struktur**
  - Perfekte (Spiel-)Daten.
  - Einschränkung auf zwei Beobachtungsjahre und zwei Altersgruppen.

Beispiel: Notation

Informelle Darstellung

- $L_x^{(i)}(t)$, $S_x^{(i)}(t)$ Bestand und Schaden von Tarif $\tau^{(i)}$ im Jahr t und in Altersgruppe x.
- $(k_x)_x$ gemeinsames Profil.
- Übliche GKS-Formel

$$\widehat{G}^{(i)}(t) = \frac{\sum_x S_x^{(i)}(t)}{\sum_x L_x^{(i)}(t) \cdot k_x}, \quad i = 1, 2.$$

Hinweis

Genauere Notation und Annahmen werden später vorgestellt.

Beispiel: Naheliegender Ansatz

„Klassischer Schätzer“ (kein Korrekturterm)

1. Addition von Schäden und Beständen in der Formel

$$\widehat{G}^{kl}(t) := \frac{\sum_x \left(S_x^{(1)}(t) + S_x^{(2)}(t)\right)}{\sum_x \left(L_x^{(1)}(t) + L_x^{(2)}(t)\right) \cdot k_x}.$$

2. Extrapolation der Reihe $\widehat{G}^{kl}(t_1), \ldots, \widehat{G}^{kl}(t_m)$ auf $t_{end} > t_m$ (Bez.: $\widetilde{G}^{kl}(t_{end})$).
3. Skalierung von $\widetilde{G}^{kl}(t_{end})$ auf Ursprungsniveau über Multiplikation mit $\varnothing_t \left\{ \frac{\widehat{G}^{(1)}(t)}{\widehat{G}^{kl}(t)} \right\}$.

Beispiel: Verfälschte Schätzung

Tarif $\tau^{(1)}$:

AG x	k_x	$L_x^{(1)}(t_1)$	$L_x^{(1)}(t_2)$	$S_x^{(1)}(t_1)$	$S_x^{(1)}(t_2)$	$\widehat{G}^{(1)}(t_1)$	$\widehat{G}^{(1)}(t_2)$
x_1	1	1	1	10	11	10	11
x_2	10	1	2	100	220		10 %

Tarif $\tau^{(2)}$:

AG x	k_x	$L_x^{(2)}(t_1)$	$L_x^{(2)}(t_2)$	$S_x^{(2)}(t_1)$	$S_x^{(2)}(t_2)$	$\widehat{G}^{(2)}(t_1)$	$\widehat{G}^{(2)}(t_2)$
x_1	1	1	1	20	22	20	22
x_2	10	10	10	2000	2200		10 %

Klassischer Schätzer:

AG x	k_x	$L_x^{kl}(t_1)$	$L_x^{kl}(t_2)$	$S_x^{kl}(t_1)$	$S_x^{kl}(t_2)$	$\widehat{G}^{kl}(t_1)$	$\widehat{G}^{kl}(t_2)$
x_1	1	2	2	30	33	19,02	20,11
x_2	10	11	12	2100	2420		6 %

Und nun?

Ein alternativer Schätzer

- Für einen Ausweg bemerken wir zunächst:
  - Es gilt
  $$\widehat{G}^{(2)}(t) = 2 \cdot \widehat{G}^{(1)}(t) =: \gamma \cdot \widehat{G}^{(1)}(t) \quad \text{für alle } t.$$
  - Implizite Voraussetzung vieler Stützverfahren!
- (Unsaubere[1]) Definition folgendes Schätzers (mit Korrekturterm γ) möglich:

$$\widehat{G}^{\gamma}(t) := \frac{\sum_x \left(S_x^{(1)}(t) + S_x^{(2)}(t)\right)}{\sum_x \left(L_x^{(1)}(t) + \gamma \cdot L_x^{(2)}(t)\right) \cdot k_x}.$$

[1] Hier noch keine saubere Unterscheidung zwischen Beobachtungen, Zufallsvariablen (ZV) und Erwartungswert einer ZV.

DAV Deutsche Aktuarvereinigung e.V.
DGVFM Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik e.V.

Beispiel revisited

Tarif $\tau^{(1)}$:

AG x	k_x	$L_x^{(1)}(t_1)$	$L_x^{(1)}(t_2)$	$S_x^{(1)}(t_1)$	$S_x^{(1)}(t_2)$	$\widehat{G}^{(1)}(t_1)$	$\widehat{G}^{(1)}(t_2)$
x_1	1	1	1	10	11	10	11
x_2	10	1	2	100	220		10 %

Tarif $\tau^{(2)}$:

AG x	k_x	$L_x^{(2)}(t_1)$	$L_x^{(2)}(t_2)$	$S_x^{(2)}(t_1)$	$S_x^{(2)}(t_2)$	$\widehat{G}^{(2)}(t_1)$	$\widehat{G}^{(2)}(t_2)$
x_1	1	1	1	20	22	20	22
x_2	10	10	10	2000	2200		10 %

Klassischer Schätzer:

AG x	k_x	$L_x^{kl}(t_1)$	$L_x^{kl}(t_2)$	$S_x^{kl}(t_1)$	$S_x^{kl}(t_2)$	$\widehat{G}^{kl}(t_1)$	$\widehat{G}^{kl}(t_2)$
x_1	1	2	2	30	33	19,02	20,11
x_2	10	11	12	2100	2420		6 %

Beispiel revisited

Tarif $\tau^{(1)}$:

AG x	k_x	$L_x^{(1)}(t_1)$	$L_x^{(1)}(t_2)$	$S_x^{(1)}(t_1)$	$S_x^{(1)}(t_2)$	$\widehat{G}^{(1)}(t_1)$	$\widehat{G}^{(1)}(t_2)$
x_1	1	1	1	10	11	10	11
x_2	10	1	2	100	220		10 %

Tarif $\tau^{(2)}$:

AG x	k_x	$L_x^{(2)}(t_1)$	$L_x^{(2)}(t_2)$	$S_x^{(2)}(t_1)$	$S_x^{(2)}(t_2)$	$\widehat{G}^{(2)}(t_1)$	$\widehat{G}^{(2)}(t_2)$
x_1	1	1	1	20	22	20	22
x_2	10	10	10	2000	2200		10 %

Korrigierter Schätzer:

AG x	k_x	$L_x^{\gamma}(t_1)$	$L_x^{\gamma}(t_2)$	$S_x^{kl}(t_1)$	$S_x^{kl}(t_2)$	$\widehat{G}^{kl}(t_1)$	$\widehat{G}^{kl}(t_2)$
x_1	1	3	3	30	33	19,02	20,11
x_2	10	21	22	2100	2420		6 %

Beispiel revisited

Tarif $\tau^{(1)}$:

AG x	k_x	$L_x^{(1)}(t_1)$	$L_x^{(1)}(t_2)$	$S_x^{(1)}(t_1)$	$S_x^{(1)}(t_2)$	$\widehat{G}^{(1)}(t_1)$	$\widehat{G}^{(1)}(t_2)$
x_1	1	1	1	10	11	10	11
x_2	10	1	2	100	220		10 %

Tarif $\tau^{(2)}$:

AG x	k_x	$L_x^{(2)}(t_1)$	$L_x^{(2)}(t_2)$	$S_x^{(2)}(t_1)$	$S_x^{(2)}(t_2)$	$\widehat{G}^{(2)}(t_1)$	$\widehat{G}^{(2)}(t_2)$
x_1	1	1	1	20	22	20	22
x_2	10	10	10	2000	2200		10 %

Korrigierter Schätzer:

AG x	k_x	$L_x^{\gamma}(t_1)$	$L_x^{\gamma}(t_2)$	$S_x^{kl}(t_1)$	$S_x^{kl}(t_2)$	$\widehat{G}^{\gamma}(t_1)$	$\widehat{G}^{\gamma}(t_2)$
x_1	1	3	3	30	33	10	11
x_2	10	21	22	2100	2420		10 %

Agenda

Einleitung

Einführendes Beispiel

Ein mathematisches Modell

Fazit und Ausblick

Mathematisches Modell

Definitionen

- $T := \{t_1, \ldots, t_m\}$ *Beobachtungsjahre* (BJ),
- $X \subset \mathscr{P}(\{0, 1, \ldots, \omega\})$ disjunkte *Altersgruppen* (AG) der versicherbaren Alter,
- $I_x(t)$ *Versicherungskollektiv* in BJ $t \in T$ und AG $x \in X$,
- $L_x(t) := |I_x(t)|$ *Anzahl an Versicherten* in BJ $t \in T$ und AG $x \in X$,
- $Y_j(t)$ *versicherte Krankheitskosten* für Individuum $j \in I_x(t)$, $t \in T$, $x \in X$,
- $S_x(t) := \sum_{j \in I_x(t)} Y_j(t)$ *Summe der versicherten Krankheitskosten* in BJ $t \in T$ und AG $x \in X$.

Mathematisches Modell

Standardannahmen

- $\left(Y_j(t)\right)_{j\in I_x(t),t\in T,x\in X}$ sind **integrierbare Zufallsvariablen** (ZV) auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.
- Für alle $t \in T$ und $x \in X$ gilt: Die ZV $\left(Y_j(t)\right)_{j\in I_x(t)}$ sind **identisch verteilt**.
- Die **stochastischen Prozesse** $\left(Y_j(t)\right)_{t\in T}$ sind **unabhängig** in $j \in \bigcup_{x,t} I_x(t)$.
  Hier und im Folgenden setzen wir $Y_j(t) := 0$, falls $j \notin \bigcup_{x\in X} I_x(t)$.

Bemerkung

Vergleiche **Milbrodt u. Röhrs** (2016), S. 87 f.

Mathematisches Modell

Methode von Rusam

Der *wahre Kopfschaden* $K_x(t) := \mathbb{E}\left[Y_j(t)\right] := \int_\Omega Y_j(t) \mathrm{d}\mathbb{P}$, $j \in I_x(t)$, lässt sich aufspalten in *Profil* und *Grundkopfschaden* (GKS)

$$K_x(t) = k_x \cdot G(t).$$

Schätzung von $G(t)$ mit eigenen Daten

Der kanonische Schätzer

Übliches Vorgehen bei **ausreichendem Bestand des Zieltarifes**: Schätze $G(t)$ durch

$$\widehat{G}(t) := \frac{\sum_x S_x(t)}{\sum_x L_x(t) \cdot k_x}.$$

Eigenschaften

- $\widehat{G}(t)$ ist **erwartungstreu**, d.h. $\mathbb{E}\left[\widehat{G}(t)\right] = G(t)$.
- $\widehat{G}(t)$ ist **stark konsistent**, d.h. bei isoton wachsendem Versicherungskollektiv[2] konvergiert $\widehat{G}(t)$ $\mathbb{P}$-fast-sicher gegen $G(t)$.

[2] d.h. die Menge $I_x(t)$ wächst isoton für alle x, t, und es gilt $\min_{x,t} L_x(t) \to \infty$.

Schätzung von $G(t)$ mithilfe von Stützdaten

Ziel

- $n = 2$: Bestimme einen Schätzer für $G^{(1)}(t)$ des **Zieltarifes** $\tau^{(1)}$ mithilfe der Daten eines *gleichartigen* **Stütztarifes** $\tau^{(2)}$ mit GKS $G^{(2)}(t)$.
- $n > 2$: Bestimme einen Schätzer für $G^{(1)}(t)$ des **Zieltarifes** $\tau^{(1)}$ mithilfe der Daten *gleichartiger* **Stütztarife** $\tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(n)}$ mit GKS $G^{(2)}(t), \ldots, G^{(n)}(t)$.

Schätzung von $G(t)$ mithilfe von Stützdaten

Gleichartigkeit

Zwei Tarife $\tau^{(1)}$ und $\tau^{(2)}$ heißen *gleichartig* genau dann, wenn ein $\gamma > 0$ existiert, sodass gelte:

$$\boxed{G^{(2)}(t) = \gamma \cdot G^{(1)}(t) \quad \text{für alle } t \in T\ .}$$

Interpretation: Tarife unterscheiden sich nur im Schadenniveau.

Notation

Im Folgenden seien die zu Tarif $\tau^{(i)}$ gehörigen Größen mit Index (i) gekennzeichnet, $i \in \{1, 2\}$.

Herleitung eines Schätzers

Wir erhalten

Herleitung eines Schätzers

Wir erhalten

$$\sum_x \left(L_x^{(1)}(t) \cdot K_x^{(1)}(t) + L_x^{(2)}(t) \cdot K_x^{(2)}(t)\right) = \sum_x k_x \cdot \left(L_x^{(1)}(t) \cdot G^{(1)}(t) + L_x^{(2)}(t) \cdot G^{(2)}(t)\right) \qquad \text{(wg. Rusam)}$$

Herleitung eines Schätzers

Wir erhalten

$$\sum_x \left(L_x^{(1)}(t) \cdot K_x^{(1)}(t) + L_x^{(2)}(t) \cdot K_x^{(2)}(t)\right) = \sum_x k_x \cdot \left(L_x^{(1)}(t) \cdot G^{(1)}(t) + L_x^{(2)}(t) \cdot G^{(2)}(t)\right) \qquad \left(\text{wg. Rusam}\right)$$

$$= G^{(1)}(t) \cdot \sum_x k_x \cdot \left(L_x^{(1)}(t) + \gamma \cdot L_x^{(2)}(t)\right) \qquad \left(\text{wg. } G^{(2)}(t) = \gamma \cdot G^{(1)}(t)\right)$$

DAV Deutsche Aktuarvereinigung e.V. DGVFM Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik e.V.

Herleitung eines Schätzers

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\sum_x \left(L_x^{(1)}(t)\cdot K_x^{(1)}(t) + L_x^{(2)}(t)\cdot K_x^{(2)}(t)\right) &= \sum_x k_x \cdot \left(L_x^{(1)}(t)\cdot G^{(1)}(t) + L_x^{(2)}(t)\cdot G^{(2)}(t)\right) && \text{(wg. Rusam)}\\ &= G^{(1)}(t)\cdot \sum_x k_x\cdot\left(L_x^{(1)}(t) + \gamma\cdot L_x^{(2)}(t)\right) && \left(\text{wg. } G^{(2)}(t) = \gamma\cdot G^{(1)}(t)\right)\end{aligned}$$

und wegen $\sum_x L_x^{(i)}(t) K_x^{(i)}(t) = \mathbb{E}[\sum_x S_x^{(i)}(t)]$ die Darstellung

Herleitung eines Schätzers

Wir erhalten

$$\begin{aligned}\sum_x \left(L_x^{(1)}(t)\cdot K_x^{(1)}(t) + L_x^{(2)}(t)\cdot K_x^{(2)}(t)\right) &= \sum_x k_x \cdot \left(L_x^{(1)}(t)\cdot G^{(1)}(t) + L_x^{(2)}(t)\cdot G^{(2)}(t)\right) && \text{(wg. Rusam)}\\ &= G^{(1)}(t)\cdot \sum_x k_x \cdot \left(L_x^{(1)}(t) + \gamma\cdot L_x^{(2)}(t)\right) && \left(\text{wg. } G^{(2)}(t) = \gamma\cdot G^{(1)}(t)\right)\end{aligned}$$

und wegen $\sum_x L_x^{(i)}(t) K_x^{(i)}(t) = \mathbb{E}[\sum_x S_x^{(i)}(t)]$ die Darstellung

$$G^{(1)}(t) = \frac{\mathbb{E}\left[\sum_x S_x^{(1)}(t) + S_x^{(2)}(t)\right]}{\sum_x k_x \cdot \left(L_x^{(1)}(t) + \gamma\cdot L_x^{(2)}(t)\right)}$$

als Grundlage für die Herleitung eines Schätzers.

Aussagen über einen Schätzer

Theorem

Es seien $\hat{\gamma}$ ein Schätzer für γ, $(\hat{k}_x)_{x \in X}$ ein Schätzer für $(k_x)_{x \in X}$ und

$$\widehat{G}^{\gamma}(t) := \frac{\sum_x S_x^{(1)}(t) + S_x^{(2)}(t)}{\sum_x \hat{k}_x \cdot \left(L_x^{(1)}(t) + \hat{\gamma} \cdot L_x^{(2)}(t)\right)}.$$

Aussagen über einen Schätzer

Theorem

Es seien $\hat{\gamma}$ ein Schätzer für γ, $(\hat{k}_x)_{x\in X}$ ein Schätzer für $(k_x)_{x\in X}$ und

$$\widehat{G}^{\gamma}(t) := \frac{\sum_x S_x^{(1)}(t) + S_x^{(2)}(t)}{\sum_x \hat{k}_x \cdot \left(L_x^{(1)}(t) + \hat{\gamma} \cdot L_x^{(2)}(t)\right)}.$$

- *Wenn $\hat{\gamma} = \gamma$ und $(\hat{k}_x)_{x\in X} = (k_x)_{x\in X}$ $\mathbb{P}$-f.s., dann ist $\widehat{G}^{\gamma}(t)$ ein **erwartungstreuer** Schätzer für $G^{(1)}(t)$.*
- *Wenn $\hat{\gamma}$ ein stark konsistenter Schätzer für γ und $(\hat{k}_x)_{x\in X}$ ein stark konsistenter Schätzer für $(k_x)_{x\in X}$ ist, so ist $\widehat{G}^{\gamma}(t)$ ein **stark konsistenter** Schätzer für $G^{(1)}(t)$.*

Beweis.

- Erwartungstreue folgt aus Erwartungstreue des kanonischen Schätzers.
- Sei

$$\widehat{G}^{\gamma,k}(t) = \frac{\sum_x S_x^{(1)}(t) + S_x^{(2)}(t)}{\sum_x k_x \cdot \left(L_x^{(1)}(t) + \hat{\gamma} \cdot L_x^{(2)}(t)\right)}.$$

  Dann folgt die Konsistenz von $\widehat{G}^{\gamma,k}(t)$ aus Satz 4.2.1 der Bachelorarbeit von H. Käsgen.
- Es gilt weiter

$$\widehat{G}^{\gamma}(t) = \widehat{G}^{\gamma,k}(t) \cdot \frac{\sum_x k_x \cdot \left(L_x^{(1)}(t) + \hat{\gamma} \cdot L_x^{(2)}(t)\right)}{\sum_x \hat{k}_x \cdot \left(L_x^{(1)}(t) + \hat{\gamma} \cdot L_x^{(2)}(t)\right)}.$$

  Da der letzte Bruch $\mathbb{P}$-f.s. gegen 1 konvergiert, folgt dann die Behauptung.

$\square$

Der Fall $n > 2$ in aller Kürze

Voraussetzungen

- Es seien $\tau^{(2)}, \ldots, \tau^{(n)}$ zu einem Zieltarif $\tau^{(1)}$ gleichartige Tarife.
- Es seien $\hat{\gamma}^{(i)}$ geeignete Schätzer für $\gamma^{(i)}$, $i = 2, \ldots, n$, und $\hat{\gamma}^{(1)} = 1$.
- Es sei $(\hat{k}_x)_{x \in X}$ ein geeigneter Schätzer für $(k_x)_{x \in X}$.

Der Schätzer für $n > 2$

Definiere

$$\widehat{G}^{\gamma}(t) := \frac{\sum_i \sum_x S_x^{(i)}(t)}{\sum_i \hat{\gamma}^{(i)} \cdot \sum_x L_x^{(i)}(t) \cdot \hat{k}_x}.$$

Agenda

Einleitung

Einführendes Beispiel

Ein mathematisches Modell

Fazit und Ausblick

Fazit

Vorteile der Methode

- **Erwartungstreuer bzw. konsistenter Schätzer**.
- **Konsistenz in der Kalkulation** durch einheitliche Kalkulationsmethode.
- Gute **Automatisierbarkeit** (sowohl Kalkulation als auch Dokumentation!).
- **Implizite Gewichtung der Bestandsgrößen** der Stütztarife.
- Gute **Erklärbarkeit** (Verbleib im „klassischen Methodenkatalog“ der KV).

Bemerkungen

- Die Aussagen gelten auch für **tarifindividuelle Profile**.
- **Aber**: Ist dann die vorausgesetzte Skalierungseigenschaft der GKS in der Realität sinnvoll zu interpretieren?

Ausblick

Weiterführende Literatur

Pricing German Health Insurance Products with Only Few Insured Persons, Jens Piontkowski, 2025, European Actuarial Journal

- Moderner Data Science Ansatz (Bayes non-hierarchical / hierarchical).
- Nebenbei bemerkenswerte Überlegungen zu Varianzannahmen der Schäden, zeitliche Korrelationen, Extrapolationsannahmen und vieles Weiteres.

Diverse Erweiterungen

- Im Anhang finden sich weitere Anmerkungen und Aussagen.
- Die Aussagen setzen die Kenntnis des wahren Profils voraus, lassen sich aber (wahrscheinlich) leicht auf den Fall einer Schätzung des Profils erweitern.

Anhang

Herausforderungen in der Umsetzung

Auswahl

- **Tarifklassen**:
  - Auswahl: Welche Tarife haben eine gleiche Schadentrenderwartung?
  - Stabilität: Ist die Auswahl stabil?
- **Konsistente Aufbereitung der Kopfschadenstatistik für eine Tarifklasse**:
  - Sondereffekte,
  - Leistungs- / SB-Unterschiede,
  - Großschäden, ...
- **Technische Umsetzung**:
  - Nachhalten der Änderungen der Zugehörigkeit zu einer Tarifklasse.
  - Ggf. erweiterte Datenhaltung benötigt, um diese automatisch zuzusteuern.

Tarifklasse

Definition

Eine Zusammenfassung gleichartiger Tarife $\tau^{(1)}, \dots, \tau^{(n)}$ bezeichnen wir als *Tarifklasse*.

Transitivität

Offensichtlich ist die Eigenschaft „gleichartig" (in Folge „$\sim$") transitiv.

- D.h. für alle $i, j, k \in \{1, \dots, n\}$ gilt

$$\tau^{(i)} \sim \tau^{(j)} \quad \text{und} \quad \tau^{(j)} \sim \tau^{(k)} \Longrightarrow \tau^{(i)} \sim \tau^{(k)}.$$

- Erst damit ist obige Definition möglich.

Eine Familie von Schätzern

Definition

Es sei

$$\widehat{G}^{\zeta}(t) := \zeta(t) \cdot \widehat{G}^{(1)}(t) + (1 - \zeta(t)) \cdot \hat{\gamma}^{-1} \cdot \widehat{G}^{(2)}(t)$$

mit $0 < \zeta(t) < 1$ und $\hat{\gamma}$ ein Schätzer für γ.

Bemerkungen

- Dann gilt:

$$\widehat{G}^{\gamma}(t) = \widehat{G}^{\zeta_1}(t) \quad \text{mit } \zeta_1(t) = \frac{\sum_x L_x^{(1)}(t) \cdot k_x^{(1)}}{\sum_x L_x^{(1)}(t) \cdot k_x^{(1)} + \hat{\gamma} \cdot \sum_x L_x^{(2)}(t) \cdot k_x^{(2)}}.$$

- Auch hier Erweiterung auf $n > 2$ möglich: Bilde konvexe Linearkombination der „γ-korrigierten“ GKS.

Eigenschaften der Familie von Schätzern

Theorem

- *Wenn $\hat{\gamma} = \gamma$ $\mathbb{P}$-f.s., dann ist $\widehat{G}_\zeta(t)$ ein* ***erwartungstreuer*** *Schätzer für $G^{(1)}(t)$.*
- *Wenn $\hat{\gamma}$ ein stark konsistenter Schätzer für γ ist, so ist $\widehat{G}_\zeta(t)$ ein* ***stark konsistenter*** *Schätzer für $G^{(1)}(t)$.*

Beweis.

Analog zum Beweis von Satz 4.2.1 der Bachelorarbeit von H. Käsgen. $\square$

Eigenschaften des klassischen Schätzers

Wann ist der klassische Schätzer nicht verfälscht?

- In der Folge werden in zwei Formulierungen Voraussetzungen hergeleitet, unter denen der klassische Schätzer erwartungstreu bzw. konsistent ist.
- Dabei ist die erste Formulierung eher unintuitiv.
- Die zweite Formulierung läuft auf eine Zusatzbedingung an die profilgewichteten Bestände hinaus.

Notation

Dazu seien

$$\lambda^{(i)}(t) := \sum_x L_x^{(i)}(t) \cdot k_x, \; i = 1, 2, \quad \text{und} \quad G^{kl}(t) := \mathbb{E}(\widehat{G}^{kl}(t)).$$

Eigenschaften des klassischen Schätzers

Theorem

Es existieren $\mu > 0$ und $\eta > 0$, sodass für alle t

$$\lambda^{(2)}(t) = \mu \cdot \lambda^{(1)}(t) \qquad \textit{und} \qquad G^{(1)}(t) = \eta \cdot G^{kl}(t).$$

- *Wenn $\hat{\eta} = \eta$ $\mathbb{P}$-f.s., dann ist $\hat{\eta} \cdot \widehat{G}_k(t)$ ein **erwartungstreuer** Schätzer für $G^{(1)}(t)$.*
- *Wenn $\hat{\eta}$ ein stark konsistenter Schätzer für η ist, so ist $\hat{\eta} \cdot \widehat{G}^{kl}(t)$ ein **stark konsistenter** Schätzer für $G^{(1)}(t)$.*

Beweis.

Erwartungstreue bzw. Konsistenz folgt aus Erwartungstreue bzw. Konsistenz der kanonischen Schätzer. $\square$

Eigenschaften des klassischen Schätzers

Korollar

Es existiere $\mu > 0$ und $\gamma > 0$, sodass für alle t

$$\lambda^{(2)}(t) = \mu \cdot \lambda^{(1)}(t) \qquad \text{und} \qquad G^{(2)}(t) = \gamma \cdot G^{(1)}(t).$$

- Wenn $\hat{\gamma} = \gamma$ $\mathbb{P}$-f.s., dann ist $\frac{1+\mu}{1+\mu\cdot\hat{\gamma}} \cdot \widehat{G}^{kl}(t)$ ein **erwartungstreuer** Schätzer für $G^{(1)}(t)$.
- Wenn $\hat{\gamma}$ ein stark konsistenter Schätzer für γ ist, so ist $\frac{1+\mu}{1+\mu\cdot\hat{\gamma}} \cdot \widehat{G}^{kl}(t)$ ein **stark konsistenter** Schätzer für $G^{(1)}(t)$.

Eigenschaften des klassischen Schätzers II

Beweis.

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\widehat{G}^{kl}(t) &= \frac{\lambda^{(1)}(t)}{\lambda^{(1)}(t)+\lambda^{(2)}(t)} \cdot \widehat{G}^{(1)}(t) + \frac{\lambda^{(2)}(t)}{\lambda^{(1)}(t)+\lambda^{(2)}(t)} \cdot \widehat{G}^{(2)}(t) \\
&= \frac{1}{1+\mu} \cdot \widehat{G}^{(1)}(t) + \frac{\mu}{1+\mu} \cdot \widehat{G}^{(2)}(t) \\
&= \frac{1+\mu\cdot\gamma}{1+\mu} \cdot \widehat{G}^{(1)}(t).
\end{aligned}
$$

Also gilt $G^{(1)}(t) = \frac{1+\mu}{1+\mu\cdot\gamma} \cdot G^{kl}(t)$ und es sind die Voraussetzungen des vorherigen Satzes mit der Wahl $\eta := \frac{1+\mu}{1+\mu\cdot\gamma}$ erfüllt. □

DAV/DGVFM
Herbsttagung
2025

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

Dr. Christian Lax, Dr. Lars Schmitz, ERGO
Christian.Lax@ergo.de, Lars.Schmitz@ergo.de