DAV/DGVFM
Jahrestagung
2026

Ralf Korn, RPTU Kaiserslautern-Landau, Fraunhofer ITWM

Werterhaltende Portfolio- und Konsumstrategien: Generationengerechtigkeit

Fachgruppe AFIR/ERM, 28.04.2026, 14:30

Agenda

- Generationengerechtigkeit
- Werterhaltende Portfolio- und Konsumstrategien (WPK) und Generationengerechtigkeit
- Das minimale Marktmodell nach E. Platen
- WPK im minimalen Marktmodell
- Mögliche Anwendungen in der Altersvorsorge

(Keine) Generationengerechtigkeit

Klassisches Lebenszeitkonsumproblem nach Merton (1969)

$$max_{(\pi,c)\in A(x)} E\left(\int_0^\infty e^{-\delta t}\frac{1}{\gamma}c(t)^\gamma dt\right)$$

(Keine) Generationengerechtigkeit

Klassisches Lebenszeitkonsumproblem nach Merton (1969)

$$max_{(\pi,c)\in A(x)} E\left(\int_0^\tau e^{-\delta t}\frac{1}{\gamma}c(t)^\gamma dt\right)$$

Für eine exponential verteilte Stoppzeit τ mit Parameter λ und eine Abzinsrate δ mit

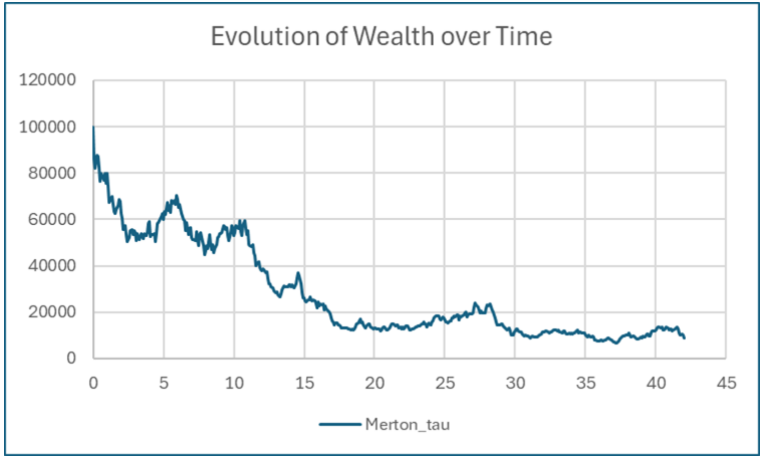
$$\delta + \lambda > \gamma \cdot \left(r + \tfrac{1}{2(1-\gamma)}\tfrac{b-r}{\sigma^2}\right)$$ **„hinreichendes Abzinsen“**

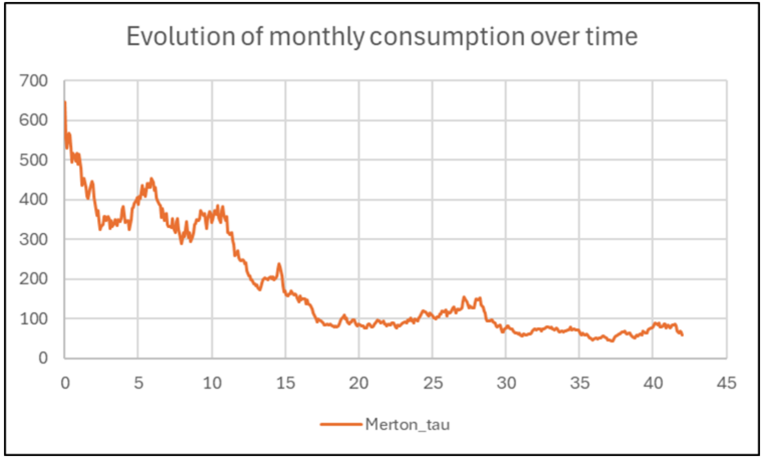
erhalten wir die optimale Portfolio- und Konsumstrategie

$$(\pi, c) = \left(\frac{b-r}{(1-\gamma)\sigma^2}, \frac{\gamma}{1-\gamma}\left(\frac{\delta+\lambda}{\gamma} - \left(r + \tfrac{1}{2(1-\gamma)}\frac{b-r}{\sigma^2}\right)\right)X(t)\right)$$

(Keine) Generationenergerechtigkeit - Beispiel

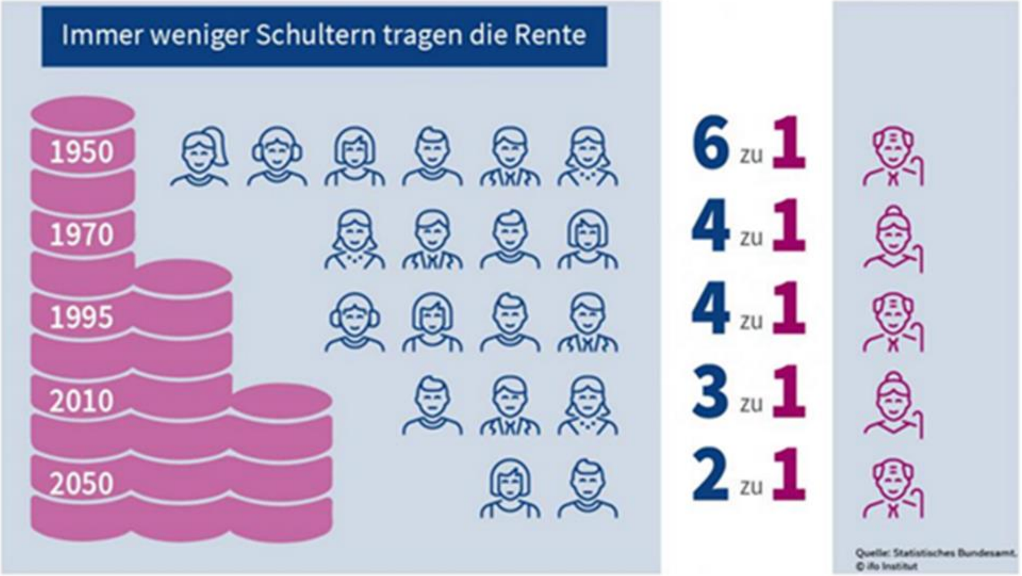
- x= 100.000, b=0,045, r=0,01, σ=0,2, δ=0,03, E(τ)=21=1/λ, γ=0





=> Klare Bevorzugung der näheren Zukunft ….

(Keine) Generationengerechtigkeit



Quelle: Statistisches Bundesamt, ifo Institut

Was ist Generationengerechtigkeit?

Basis: Speckbacher (1994): „Alterssicherung und intergenerationale Gerechtigkeit"

- Philosophisches Problem („Was ist Gerechtigkeit?") …
- Ein klassisches ökonomisches **Zweiperioden-Problem** (Ausgleich zwischen Konsum (-verzicht) und Altersvorsorge)
    - Generation Betragszahler
    - Generation Rentner
    - Heutige Beitragszahler sind die Rentner der nächsten Periode

Hauptproblem: Instationaritäten (Demographie, Gehalt, Inflation, Zins) beim Generationenübergang

Was ist Generationengerechtigkeit?

Basis: Speckbacher (1994): „Alterssicherung und intergenerationale Gerechtigkeit“

- Suche nach „Ausgleich zwischen den durch ein Alterssicherungssystem induzierten Beiträgen einer Generation zum Wohl anderer Generationen und dieser Generation“ (Zitat: Speckbacher (1994))
- Suche Gleichgewicht zwischen Konsummöglichkeiten der übrigen Generationen, die durch **Beiträge einer Generation** verursacht werden und dem Konsumanteil dieser Generation
- **Ziel:** Erhalte die Leistungsfähigkeit der Volkswirtschaft über die Zeit hinweg, denn dann lebt keine Generation auf Kosten der anderen

Forderung: Das zugehörige Alterssicherungssystem muss **effizient** sein.

Was ist Generationengerechtigkeit?

Basis: Speckbacher (1994): „Alterssicherung und intergenerationale Gerechtigkeit“

Formaler Barwert: zukünftiger Pro-Kopf-Konsum als Maß für die Leistungsfähigkeit der Volkswirtschaft

(LE) $$V = \sum_{t=1}^{T} c(t)^A q(t) + V q(T), \quad q(t) = \prod_{s=1}^{t} \frac{1}{1+i(s)}$$

mit $c(t)^A$=Pro-Kopf-Konsum der aktiven Generation zur Zeit t

$q(t)$ =Gewichtungsfaktoren zur Zeit t (sind endogen zu bestimmen, also die i(s))

und $c(t+1)^R = \rho(t+1)c(t)^A =$ Rente der in t Aktiven ($\rho(t+1)$ beliebig, aber fest)

Existiert ein Bewertungsvektor q=(q(1),…,q(T)) und ein c-Vektor, so dass (LE) gilt und das Alterssicherungssystem effizient ist?

Das wäre dann ein generationengerechtes Alterssicherungssystem.

Was ist Generationengerechtigkeit?

Basis: Speckbacher (1994): „Alterssicherung und intergenerationale Gerechtigkeit"
(Teil-) Resultate:

Hilfssatz 6.1 (Speckbacher (1994)
Die Leistungsfähigkeit der Volkswirtschaft bleibt genau dann in jeder Periode erhalten, wenn gilt: $c(t)^A = i(t)V$

i) Unter weiteren technischen Annahmen kann in Speckbacher (1994) auch die Existenz eines generationengerechten Alterssicherungssystem gezeigt werden.

ii) Es werden weitere bemerkenswerte Aussagen gezeigt wie z.B. wird ein **Umlageverfahren beendet**, so ist der Gegenwartswert aller durch dieses Verfahren geschaffenen "Benefits" gleich Null.

iii) Separationssatz: In einer kleinen offenen Volkswirtschaft kann die Wahl der Finanzierung von Gerechtigkeitsüberlegungen getrennt werden.

Was sind werterhaltende Portfolio und Konsum-Strategien?

Konzept geht zurück auf: K. Hellwig (1993), T Wiesemann (1997), K. Schäl (1999) in diskreter Zeit, K. (1997, 1998, 2001) in zeitstetigen Modellen

Philosophie:

- Abzinsen diskriminiert die Zukunft (zukünftige Generationen)
- Eine Generation erhält eine (finanz.) **Ausstattung** und muss ihren **Wert an die nächste Generation übergeben**, darf den ökonomischen Gewinn konsumieren

Fragen:

- Wie ist der Wert der (finanziellen) Ausstattung definiert?
- Was ist die zugehörige werterhaltende Portfolio- und Konsumstrategie?
- Existieren diese Dinge, sind sie eindeutig ….?

Exkurs: Das wachtumsoptimale Portfolio

Die Portfoliostrategie, die das Problem

$$max_{\pi(.)} E\left(ln(X^{\pi}(T))\right)$$

im Markt mit Geldmarktkonto und Aktien mit

$$dB(t) = B(t)r(t)dt, \quad dS_i(t) = S_i(t)\left[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)dW_j(t)\right], \text{ i=1,…,d}$$

löst, heißt **wachstumsoptimales Portfolio** (WOP).

Exkurs: Das wachtumsoptimale Portfolio

Die Portfoliostrategie, die das Problem

$$max_{\pi(.)} E\left(ln(X^{\pi}(T))\right)$$

im Markt mit Geldmarktkonto und Aktien mit

$$dB(t) = B(t)r(t)dt, \quad dS_i(t) = S_i(t)\left[b_i(t)dt + \sum_{j=1}^{d} \sigma_{ij}(t)dW_j(t)\right], \text{ i=1,…,d}$$

löst, heißt **wachstumsoptimales Portfolio** (WOP). Man erhält sie (mit Vermögensproz.) als

(1) $$\pi^*(t) = (\sigma(t)\sigma'(t))^{-1}(b(t) - r(t)\mathbf{1}) =: \left(\sigma'(t)\right)^{-1}\theta(t),$$

(2) $$X^*(t) = x\, exp\left(\int_0^t \left(r(s) + \frac{1}{2}\|\theta(s)\|^2\right) ds + \int_0^t \theta(s)' dW(s)\right) =: x\frac{1}{H(t)}$$

(3) $$d\left(\frac{1}{H(t)}\right) = \frac{1}{H(t)}\left((r(t) + \|\theta(t)\|^2)dt + \theta(t)'dW(t)\right), \quad \frac{1}{H(0)} = 1$$

Beachte die Beziehung zwischen **Drift und Volatilität** des (abgez.) Vermögensprozesses!

Exkurs: Das wachtumsoptimale Portfolio – 2

Bemerkenswerte Eigenschaften des Prozesses H(t):

a) Für x ≥ 0, T > 0, und jedes zulässige Portfolio- und Konsumpaar $(\pi,c)\in A(x)$ gilt

(4) $$E\left(H(t)X(t) + \int_0^t H(s)c(s)ds\right) \leq x$$

b) Für jede Endzahlung B ≥ 0 und einen Konsumprozess c(t) mit

(5) $$E\left(\left(H(T)B + \int_0^T H(s)c(s)ds\right)^{\mu}\right) < \infty \quad \text{für ein } \mu > 1$$

gilt

(6) $$E\left(H(T)B + \int_0^T H(s)c(s)ds\right) = E^Q\left(e^{-\int_0^T r(t)dt}B + \int_0^T e^{-\int_0^s r(t)dt}c(s)ds\right)$$

wobei Q ein äquivalentes Martingalmaß ist (falls es existiert!).

=> $H(t)$ ist ein **Deflator**, also ein positiver stoch. Prozess, s.d. für alle Wertpapierpreise $S_i(t)$

$H(t)S_i(t)$ P-Martingal für i=0,1,…,d mit $S_0(t) = B(t)$ ist.

Was sind werterhaltende Portfolio und Konsum-Strategien?

Ann.: Marktmodell mit **Deflator** $H(t)$

Es sei X(t) Vermögensprozess für eine Portfolio- und (kumulative) Konsumstrategie (π,*C*) mit

$$dX(t) = X(t)[r(t) + \pi(t)'(b(t) - r(t)1)dt + \pi(t)\sigma(t)dW(t)] - dC(t), \qquad X(0) = x.$$

Definition: Der **Portfoliowert** $V(t, X(t)) = V(t, X(t); \pi, C)$ (bzgl. Deflator H(.)) ist definiert als

(*) $V(t, X(t)) = \frac{1}{H(t)} E\left(H(T)X(T) + \int_t^T H(s)dC(s) \,|F_t\right) \qquad \left(= E_Q\left(\frac{B(t)}{B(T)} X(T) + \int_t^T \frac{B(t)}{B(s)} dC(s) \,|F_t\right)\right)$

Ein Paar (π,*C*) heißt eine **werterhaltende Portfoliostrategie** falls gelten

$V(t, X(t)) = xB(t)$ „**risikolose Portfoliowertentwicklung**“

$\frac{d(V(t,X(t))+C(t))}{V(t,X(t))} = H(t)d\left(\frac{1}{H(t)}\right)$ „Konsumrate wie **Wachstum des abg. WOP**“

Was sind werterhaltende Portfolio und Konsum-Strategien?

Einfaches Beispiel.: d=1, konst. Koeffiz., $H(t) = exp\left(-rt - \theta W(t) - \frac{1}{2}\theta^2 t\right), \theta = (b-r)/\sigma$

$\Rightarrow$ Es existiert eine eindeutige WPK mit Handelsstrategie $\left(\varphi_0(t), \varphi_1(t)\right)$ und Konsum C(t)

$$\varphi_0(t) = x\left(1 - \frac{b-r}{\sigma^2}\right), \quad \varphi_1(t) = x\frac{b-r}{\sigma^2}\frac{B(t)}{S_1(t)}$$

$$dC(t) = xB(t)\left(\theta^2 dt + \theta dW(t)\right) = xB(t)\theta dW^Q(t)$$

Insbesondere ist dann $C(t)$ ein striktes P-Submartingal und

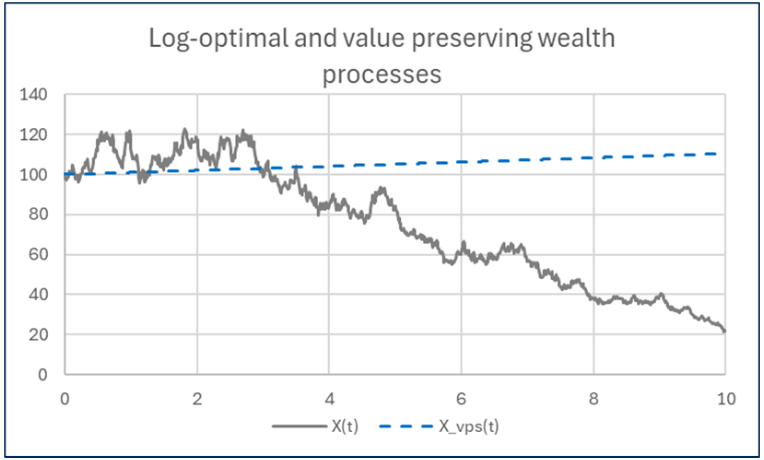
$$\frac{X(t)}{B(t)} + \int_t^T \frac{1}{B(s)} dC(s) = x + \int_t^T x\theta dW^Q(s)$$

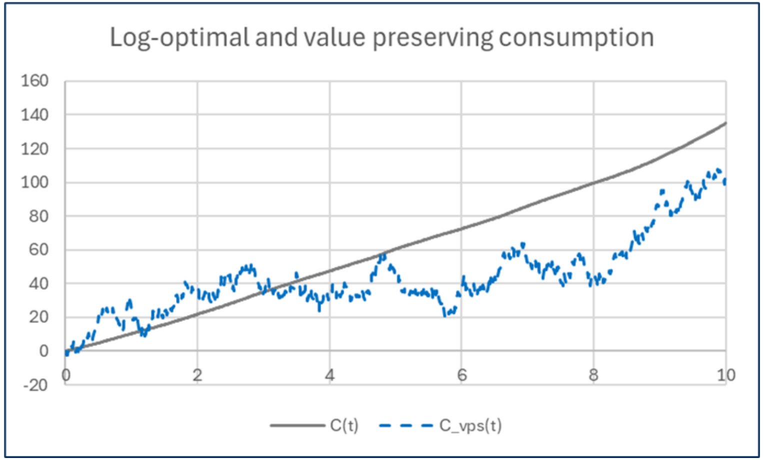
ist ein Q-Martingal, d.h. das werterh. Martingalmaß (gemäß H(t)) ist gleich dem „üblichen“ Q.

Was sind werterhaltende Portfolio und Konsum-Strategien?

Beispiel (Fortsetzung): d=1, r=0.01, b=0.05, σ=0.2, T=10, x=100

Vgl. die log-optimalen Vermögens- und Konsumprozesse mit den werterhaltenden Gegenstücken:





Was sind werterhaltende Portfolio und Konsum-Strategien?

Beispiel (Fortsetzung): d=1, r=0.01, b=0.05, σ=0.2, T=10, x=100

Vgl. die Erwartungswerte der log-optimalen Vermögens- und Konsumprozesse mit den werterhaltenden Gegenstücken:

T	1	10	20	40	50
$E(C(T))_{WPK}$	4,02	42,07	88,56	196,73	259,49
$E(B)_{WPK}$	101,01	110,52	122,14	149,18	164,87
Summe	**105,03**	**152,59**	**210,70**	**345,91**	**424,36**
$E(C(T))_{log}$	51,27	117,95	163,65	311,66	438,53
$E(X(T))_{log}$	52,56	14,99	12,94	18,02	23,89
Summe	**103,83**	**132,94**	**176,59**	**329,68**	**462,42**

Was sind werterhaltende Portfolio und Konsum-Strategien?

Hauptproblem des Beispiels

Wer glaubt an konstante Zinsen und Marktkoeffizienten über einen längeren Zeitraum, also oberhalb von zehn Jahren?

- Es braucht ein realistischeres Aktienpreismodell
- Vielleicht sogar nur ein realistisches Modell für die Entwicklung eines Aktienindices über die Zeit …

=>

Das minimale Marktmodell von E. Platen (2006) (Vortrag von E.Platen auf der Jahrestagung (2024) in der Pensionsgruppe!)

Was ist das minimale Marktmodell?

- Das minimale Marktmodell von E. Platen (Platen 2006, …) basiert auf einer empirisch getesteten Parametrisierung des WOP, die hier nur angedeutet werden kann.
- Das Modell besagt im Wesentlichen, dass weit diversifizierte Indices als Approximation für das WOP genutzt werden können und dass der (zeittransformierte) exponentielle Zuwachs im WOP ein Mean-Reversion-Prozess um eine Gerade ist, deren Parameter sich stabil aus den Daten schätzen lassen.

DAV Deutsche Aktuarvereinigung e.V. DGVFM Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik e.V.

Was ist das minimale Marktmodell?

DEh *r* =0 =>

$$dX^{\mathrm{WOP}}(\mathrm{t}) = X^{\mathrm{WOP}}(\mathrm{t}) \sum_{j=1}^{d} \theta_j(t)\big(\theta_j(t)dt + dW_j(t)\big) = X^{\mathrm{WOP}}(\mathrm{t})\big(\|\theta(t)\|(\|\theta(t)\|dt + dW(t))\big)$$

$$dW(t) = \frac{1}{\|\theta(t)\|}\sum_{j=1}^{d} \theta_j\, dW_j(t), \qquad \|\theta(t)\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{d} \theta_j(t)^2}$$

Reparametrisiere WOP via $\alpha(t) = X^{WOP}(t)\|\theta(t)\|^2 = \alpha(0)exp\left(\int_o^t \eta(s)ds\right)$ (später $\eta(t) \equiv \eta$)

$\Rightarrow$ $$dX^{go}(t) = \alpha(t)dt + \sqrt{X^{go}(\mathrm{t})\alpha(t)}dW(t)$$

$\Rightarrow$ $$dY(t) = \big(1 - \eta(t)Y(t)\big)dt + \sqrt{Y(\mathrm{t})}dW(t), \;\; Y(0) = \frac{X^{go}(0)}{\alpha(0)}, \text{ für } Y(\mathrm{t}) = \frac{X^{go}(t)}{\alpha(t)} = \frac{1}{\|\theta(t)\|^2}$$

Bem: Skaliertes WOP *Y*(*t*) ist mean-reverting!

Was ist das minimale Marktmodell?

Plan:

1. Schätze die Parameter η und $\alpha(0)$ von $Y(t)$ aus einer beobachteten Zeitreihe des gewählten Index.

2. Erhalte die zugehörige Handelsstrategie ϕ in den am Index beteiligten Wertpapieren auf die Art, wie sie in den Index eingehen.

Was ist das minimale Marktmodell?

Theorem 5 (Werterhaltende Strategien im minimalen Marktmodell (K. , Xi (2026))

Es sei $X^{WOP}(t)$ der Vermögensprozess des WOP (approx. durch einen gewählten diversifizierten Index), δ sei die Handelsstrategie, mit der der Index bestimmt wird. Für ein geg. Anfangsvermögen $x > 0$ ist die **eindeutige werterhaltende Strategie** (φ,C) gegeben als

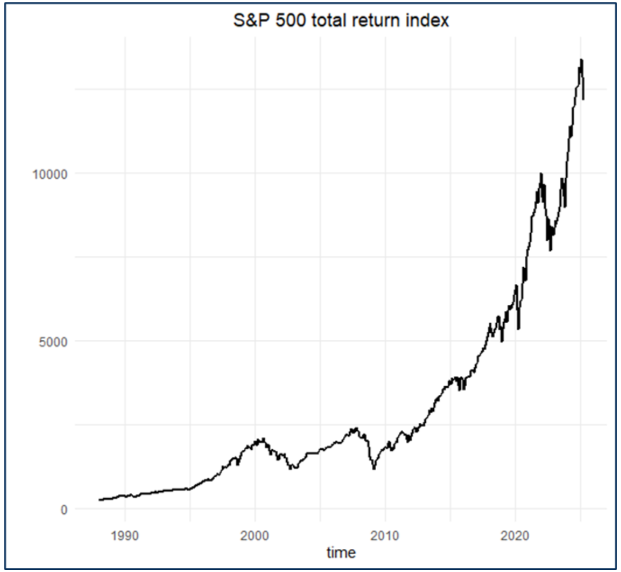
$$\varphi_0(t) = x - \sum_{i=1}^{d} \varphi_i(t) S_i(t), \qquad \left(\varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t)\right)' = \frac{x}{X^{go}(t)} \delta(t),$$

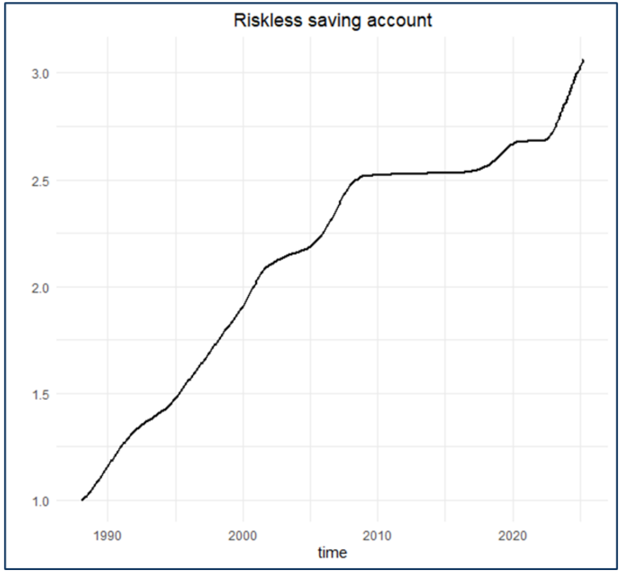
$$dC(t) = x \frac{1}{X^{go}(t)} dX^{go}(t)$$

Beachte: Erweiterung auf $r(t) \neq 0$ (oder sogar zufälliges $r(t)$) ist einfach und geschieht, indem x durch $xB(t)$ ersetzt wird, wobei $B(t)$ das Geldmarktkonto mit $B(0)=1$ ist.

Empirische Anwendung

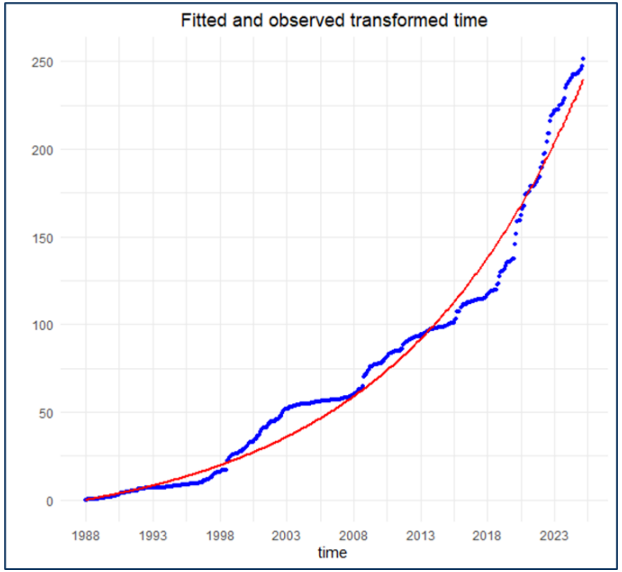
Anwendung für S&P 500 (Daten von Yahoo Finance und Federal Reserve Bank of St. Louis, 31.01.1988-31.03.2025, Bilder aus K., Xi (2026))

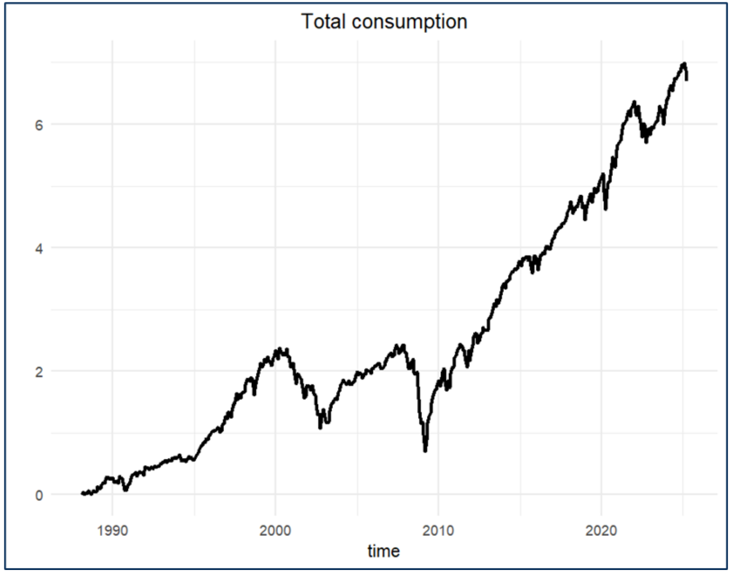




Empirische Anwendung

Anwendung für S&P 500 (Daten von Yahoo Finance und Federal Reserve Bank of St. Louis, 31.01.1988-31.03.2025, Bilder aus K., Xi (2026))





Empirische Anwendung

Anwendung für S&P 500 (Daten von Yahoo Finance und Federal Reserve Bank of St. Louis, 31.01.1988-31.03.2025, Bilder aus K., Xi (2026))

Vergleiche der durchschnittlichen Jahresrenditen

- Risikoloses Investment ≈ 3 %
- S&P 500 ≈ 10,5 %
- Werterhaltende Strategie ≈ 6,3 %

Parameterwerte

$$\alpha(0) = 5.440573, \quad \eta = 0.0696386.$$

DAV Deutsche Aktuarvereinigung e.V.

DGVFM Deutsche Gesellschaft für Versicherungs- und Finanzmathematik e.V.

Welche Anwendungen ergeben sich für die Altersvorsorge?

Anwendung 1: Werterhaltender (Pseudo-) Riester **„Garantie mit Potenzial"**
DEh Einmalprämie x (sonst für jede Einzahlung analoge Konstruktion)

- Wähle einen breit diversifizierten Index
- Verspreche zur Zahlung x>0 eine sichere Zahlung mit risikoloser Verzinsung in T
- Verfolge die werterhaltende Portfolio- und Konsumstrategie
- Verwalte auf einem separaten Konto den kumulativen Konsumprozess und zahle ihn am Ende als Bonus (teilweise) zusätzlich aus

Bem: Die risikolose Verzinsung kann das Geldmarktkonto oder eine fortlaufende Anlage in kurzlaufende Anleihen/Festgeld sein, muss nicht zwingend eine Bruttobeitragsgarantie sein. Insgesamt verbleibt bei langer Laufzeit ein minimales Restrisiko, dass die Beitragsgarantie nicht gehalten werden kann (=> nicht schlimm !!??)

Welche Anwendungen ergeben sich für die Altersvorsorge?

Anwendung 2: Werterhaltendes Zweitopf-Hybrid-Produkt

DEh Einmalprämie x (sonst für jede Einzahlung analoge Konstruktion)

- Wähle „Garantie mit Potential“ aus Anwendung 1 als (Pseudo-)Garantiefonds
- Wähle freien Fonds wie üblich als zweite Anlage
- Wähle eine geeignete Allokationsstrategie in die beiden Töpfe

Welche Anwendungen ergeben sich für die Altersvorsorge?

… und viele weitere denkbare Varianten!

Bei Interesse:

ralf.korn@itwm.fraunhofer.de

Und noch etwas Werbung in eigener Sache:

21. Mai 2026 Kaiserslautern: AMSA-Workshop (kostenlos!) am Fraunhofer ITWM
„Neues aus KI, SAA und Produktkonzepte aus KL“

10.-14. August, Lausanne: 37th International Summer School of the Swiss Association of Actuaries on *“Insurance: Innovations for Products, Sustainability and Regulation”*

11./12. Juni, Bielefeld: DGVFM-Workshop “Wissenschaft trifft Praxis”

ralf.korn@rptu.de

Vielen Dank für Ihre Aufmerksamkeit.

Ralf Korn, RPTU Kaiserslautern-Landau
& Fraunhofer ITWM Kaiserslautern
ralf.korn@rptu.de

Literaturquellen

K. Hellwig (1997) Intertemporal choice reexamined/Ein neuer Ansatz zur intertemporalen Entscheidungsfindung. Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik, Band 216, Heft 2, 153-163.

K. Hellwig (1996) Portfolio selection under the condition of value preservation. Review of Quantitative Finance and Accounting 7, 299-305.

R. Korn (1997) Value preserving portfolio strategies in continuous-time models. Mathematical Methods of Operations Research 45, 1-43.

R. Korn, Z. Li (2026) Value peserving portfolio strategies in the minimal market model. IMA Journal of Management Mathematics. Im Druck.

R. Korn, M. Schäl (1999) On value preserving and growth optimal portfolios. Mathematical Methods of Operations Research 50, 189-218,

R. Merton (1969) R.C. Merton. Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous case. Review of Economics and Statistics 51, 247-257.

G. Speckbacher (1994) Alterssicherung und intergenerationale Gerechtigkeit. Dissertation Univ. Ulm, 1994

E. Platen (2001) A minimal financial market model. In: M. Kohlmann and S. Tang, Mathematical Finance 293-301, Birkhäuser Basel.

E. Platen (2006) A benchmark approach to finance. Mathematical Finance 16, 131-151, 2006.

T. Wiesemann (1995) Wertorientiertes Portfoliomanagement: Ein Modell zur intertemporalen Portfoliowerterhaltung. Dissertation, Univ. Ulm, 1995.

DAV/DGVFM
Jahrestagung
2026

Besuchen Sie unsere Webseite

www.aktuar.de